Analisi Matematica | Informatica 9 CFU | Durata della prova: 90 min. 10.9.14

Firma: ....

Cognome .... Nome ....

Matricola .... A.A. ....

D1	
D2	
E1	
E2	
E3	
E4	
E5	
Σ	

Domanda 1

[3 punti]

(i) Dare la definizione di una successione convergente.

(ii) Fare un esempio di una successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con $\lim_{n\to+\infty} a_n = e$

Risposta

(i) cfr. appunti

(ii) p.e. $\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$

Domanda 2

[4 punti]

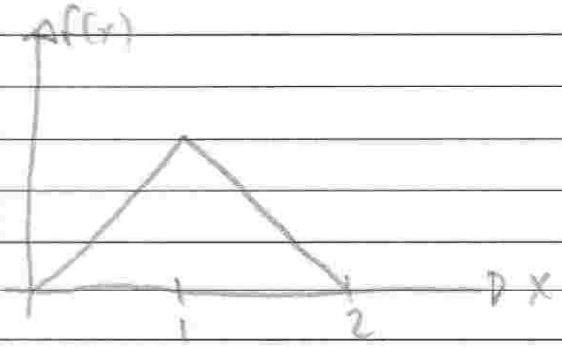
(i) Enunciare il teorema di Fermat.

(ii) Dire se esiste una funzione $f : [0,2] \to \mathbb{R}$ con massimo in $x = 1$ tale che $f'(1) \neq 0$. Giustificare la risposta (anche graficamente).

Risposta

(i) cfr. appunti

(ii) Sì, esiste p.e.



f non è derivabile in $x=1$ e quindi $f'(x_0) \neq 1$ è vero.

Esercizio 1

[5 punti]

Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{3^n \cdot n!} =: a_n$$

Risoluzione

Usando il criterio del rapporto segue

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{\cancel{n+1}}}{\underbrace{\cancel{3^{n+1}}}_{3} \cdot \underbrace{(n+1)!}_{\cancel{n!}\cancel{(n+1)}}} \cdot \frac{\cancel{3^n} \cdot \cancel{n!}}{n^n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{3} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{3} \to \frac{e}{3} < 1$$

per $n \to +\infty$

$\Rightarrow$ la serie converge

Esercizio 2

[5 punti]

Calcolare l'integrale definito

$$\int_1^e x \cdot \ln(x^2)\, dx$$

Risoluzione

Usando integrazione per parti segue

$$\int_1^e x \cdot \ln(x^2)\, dx = \int_1^e \underbrace{2x}_{f'} \cdot \underbrace{\ln(x)}_{g}\, dx$$

$$= \underbrace{x^2}_{f} \cdot \underbrace{\ln(x)}_{g}\Big|_1^e - \int_1^e \overbrace{\underbrace{x^2}_{f} \cdot \underbrace{\frac{1}{x}}_{g'}}^{= x}\, dx$$

$$= \left[x^2 \cdot \ln(x) - \frac{x^2}{2}\right]_1^e = x^2 \cdot \left(\ln(x) - \frac{1}{2}\right)\Big|_1^e$$

$$= e^2 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) - 1 \cdot \left(0 - \frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{e^2+1}{2}$$

Esercizio 3

[4 punti]

Calcolare l'equazione del piano tangente della funzione $f(x, y) = \sin(x \cdot e^y)$ nel punto $\underbrace{(\frac{\pi}{2}, 0)}_{=:(x_0,y_0)}$.

Risoluzione

$f(\pi/2, 0) = \sin(\overbrace{\pi/2 \cdot e^0}^{=\pi/2}) = 1$

$f_x(x,y) = \cos(x \cdot e^y) \cdot e^y \Rightarrow f_x(\pi/2, 0) = \overbrace{\cos(\pi/2 \cdot e^0)}^{=0} \cdot e^0 = 0$

$f_y(x,y) = \cos(x \cdot e^y) \cdot x \cdot e^y \Rightarrow f_y(\pi/2, 0) = \cos(\pi/2 \cdot e^0) \cdot \pi/2 \cdot e^0 = 0$

$\Rightarrow \quad p(x,y) = f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0) \cdot (x - x_0) + f_y(x_0,y_0) \cdot (x - x_0)$

$= 1 + 0 \cdot (x - \pi/2) + 0 \cdot (y - 0)$

$= 1.$

Esercizio 4

[4 punti]

Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-\cos(xy)}{x^2+y^2} =: \ell$$

Risoluzione

• $1 - \cos(t) \sim \frac{t^2}{2}$ per $t \to 0$ $\Rightarrow$ $1 - \cos(x \cdot y) \sim \frac{x^2 \cdot y^2}{2}$ per $(x,y) \to (0,0)$

• passando in coordinate polari segue

$$\left| \underset{\text{candidato limite}}{0} - \frac{\frac{x^2 \cdot y^2}{2}}{x^2+y^2} \right| = \left| \frac{\rho^2 \cdot \cos^2\vartheta \cdot \rho^2 \cdot \sin^2\vartheta}{2 \cdot \rho} \right| \leq \frac{1}{2} \cdot \rho^3 \to 0 \text{ per } \rho \to 0$$

$\Rightarrow \quad \ell = 0.$

Esercizio 5

[7 punti]

Trovare il dominio, eventuali asintoti, intervalli di monotonia e punti di estremo locale della funzione $f(x) = e^{\frac{x+1}{x-1}}$ e tracciarne un grafico approssimativo.

Risoluzione

dominio: $\mathbb{R} \setminus \{1\} = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$

asintoti: • $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = e^{\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x+1}{x-1}} = e^1 = e$

$\Rightarrow y = e$ è un asintoto orizzontale per $x \to \pm\infty$

• $\lim_{x \to 1^\pm} f(x) = e^{\lim_{x\to 1^\pm} \frac{x+1}{x-1}} = e^{\frac{2}{0^\pm}} = \begin{cases} e^{+\infty} = +\infty & \text{per } x \to 1^+ \\ e^{-\infty} = 0 & \text{per } x \to 1^- \end{cases}$

$\Rightarrow x = 1$ è un asintoto verticale per $x \to 1^+$

derivata: $f'(x) = e^{\frac{x+1}{x-1}} \cdot \frac{(x-1)\cdot 1 - 1\cdot(x+1)}{(x-1)^2} = e^{\frac{x+1}{x-1}} \cdot \frac{-2}{(x-1)^2} < 0 \quad \forall x \neq 1$

La funzione è strettamente decrescente. Non ci sono pti. di estremo locale.

• $f(0) = e^{-1} = \frac{1}{e} < 1$

Grafico: