Analisi Matematica 1, Scritto 1-B. Durata della prova: 2 ore 10.02.17

Firma: .....

Cognome ..... Nome ..... A.A. .....

Matricola ..... Corso di Laurea .....

D1	
D2	
E1	
E2	
E3	
E4	
E5	
Σ	

Domanda 1

[4 punti]

(i) Dare la definizione di $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$.

(ii) Dare un esempio di una successione a_n tale che $\lim_{n\to+\infty} a_n = 4$.

Risposta

(i) $\forall M > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N}$ t.c. $a_n > M \ \forall n \geq n_0$

(ii) p.e. $a_n = 4 \ \forall n \in \mathbb{N}$

(opp. $a_n = \frac{4n}{n+1}, n \in \mathbb{N}$)

Domanda 2

[4 punti]

(i) Enunciare il teorema della media integrale.

(ii) Trovare un punto c del teorema della media integrale per la funzione $f(x) = x^3$ nell'intervallo $[1, 2]$.

Risposta

(i) Sia $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ continua. Allora $\exists c \in [a,b]$ t.c. $\int_a^b f(x)\,dx = f(c)\cdot(b-a)$

(ii) $\int_1^2 x^3\,dx = \frac{x^4}{4}\Big|_1^2 = \frac{2^4-1^4}{4} = \frac{16-1}{4} = \frac{15}{4} \overset{!}{=} f(c) = c^3$

$\Rightarrow c = \sqrt[3]{15/4}$ (N.B.: $f(x) = x^3$ è continua su $[1,2]$)

Esercizio 1

[5 punti]

Studiare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{\frac{n!}{(n+1)!+3725}}_{=:a_n}$$

Risoluzione

Usando il principio di sostituzione segue per $n \to +\infty$

$$a_n = \frac{n!}{(n+1)!+3725} \sim \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{n!}{n!\cdot(n+1)} = \frac{1}{n+1} \sim \frac{1}{n}$$

Inoltre $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ diverge a $+\infty$ $\Rightarrow$ (per il criterio asintotico del confronto)

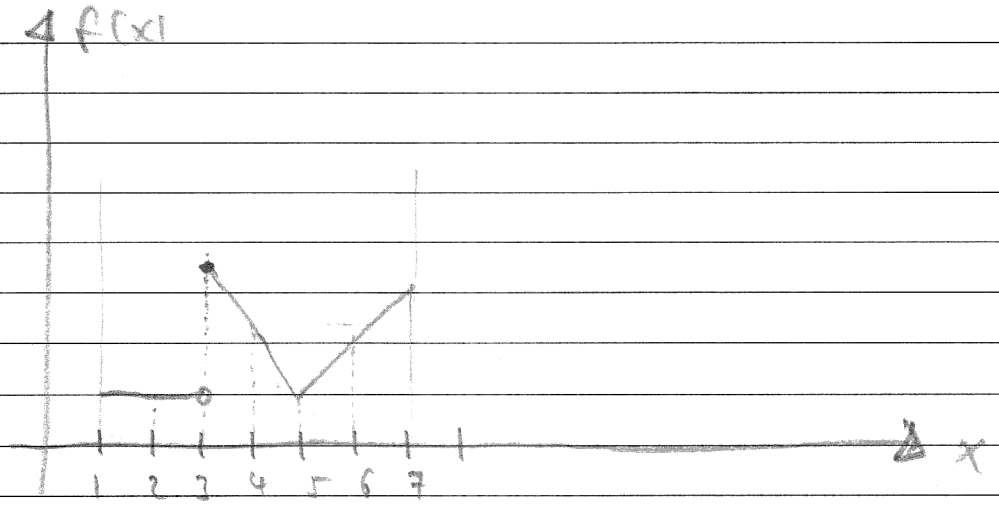
anche $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ diverge a $+\infty$

Esercizio 2

[5 punti]

Disegnare il grafico di una funzione $f : [1, 7] \to \mathbb{R}$ con $f'(2) = 0$, non continua in $x = 3$, con $f'(4) = -1$, con un punto angoloso in $x = 5$ e con $f'(6) = 1$.

Risoluzione



Esercizio 3

[5 punti]

Trovare il piano tangente in $(1, 2)$ alla funzione $f(x, y) = 11 + x^5y^3$.

Risoluzione

- $p(x,y) = f(1,2) + f_x(1,2)(x-1) + f_y(1,2)(y-2)$
- $f(1,2) = 11 + 1^5 \cdot 2^3 = 11 + 8 = 19$
- $f_x(x,y) = 5x^4 \cdot y^3 \Rightarrow f_x(1,2) = 5 \cdot 1^4 \cdot 2^3 = 5 \cdot 8 = 40$
- $f_y(x,y) = x^5 \cdot 3y^2 \Rightarrow f_y(1,2) = 1^5 \cdot 3 \cdot 2^2 = 3 \cdot 4 = 12$

Quindi $p(x,y) = \underline{\underline{19 + 40 \cdot (x-1) + 12 \cdot (y-2)}}$

Esercizio 4

[4 punti]

Studiare il limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^3 \cdot \sin(x^3)}{x^6 + y^6} =: f(x,y)$$

Risoluzione

Poniamo $y = m \cdot x$, $m \in \mathbb{R}$.

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{m^3 \cdot x^3 \cdot \sin(x^3)}{x^6 + m^6 \cdot x^6} = \lim_{x\to 0} \frac{m^3}{1+m^6} \cdot \underbrace{\frac{\sin(x^3)}{x^3}}_{\to 1 \ (x\to 0)}$$

$$= \frac{m^3}{1+m^6}$$

Quindi $\lim_{x\to 0} f(x, mx)$ dipende da $m \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ <u>non</u> esiste.

Esercizio 5

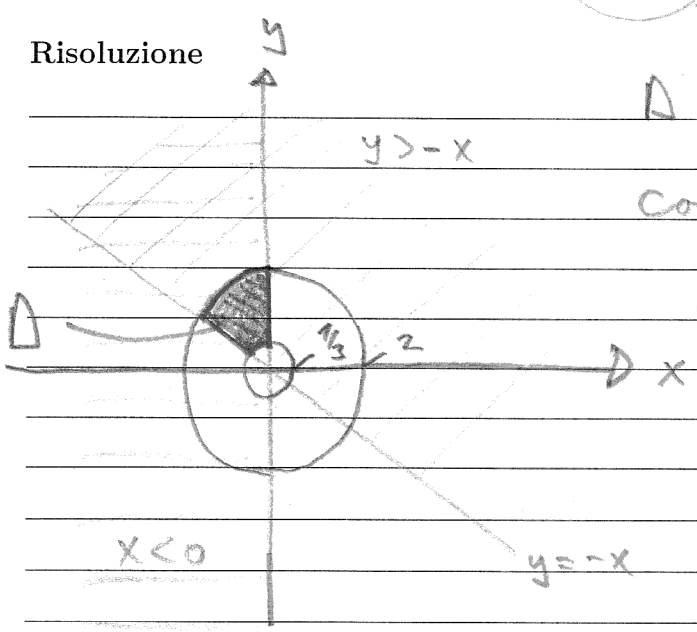
[5 punti]

Disegnare l'insieme $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{9} \le x^2 + y^2 \le 4,\ x \le 0,\ -x \le y\}$. Calcolare l'integrale

$$I := \iint_D \frac{y+x}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dx\, dy.$$

continua in D

Risoluzione



D corrisponde in coordinate polari a

$$D' = \underbrace{\left[\tfrac{1}{3}, 2\right]}_{\rho} \times \underbrace{\left[\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{3}{4}\pi\right]}_{\vartheta}$$

Quindi segue

$$I = \int_{1/3}^{2} \int_{\pi/2}^{\frac{3}{4}\pi} \frac{\rho \cdot \sin\vartheta + \rho \cdot \cos\vartheta}{\cancel{\rho}} \cdot \cancel{\rho} \cdot d\vartheta\, d\rho$$

$$= \int_{1/3}^{2} \rho\, d\rho \cdot \int_{\pi/2}^{3/4\pi} \sin\vartheta + \cos\vartheta\, d\vartheta$$

$$= \frac{\rho^2}{2}\Big|_{1/3}^{2} \cdot \Big[-\cos\vartheta + \sin\vartheta\Big]_{\pi/2}^{3/4\pi}$$

$$= \frac{2^2 - \left(\frac{1}{3}\right)^2}{2} \cdot \Big[\underbrace{-\cos\tfrac{3}{4}\pi}_{=-\frac{\sqrt{2}}{2}} + \underbrace{\sin\tfrac{3}{4}\pi}_{=\frac{\sqrt{2}}{2}} + \underbrace{\cos\tfrac{\pi}{2}}_{=0} - \underbrace{\sin\tfrac{\pi}{2}}_{=1}\Big]$$

$$= \frac{4 - \frac{1}{9}}{2} \cdot \left(\sqrt{2} - 1\right) = \underline{\underline{\frac{35}{18}\left(\sqrt{2} - 1\right)}}$$