Analisi Matematica 1, Scritto A. Durata della prova: 2 ore 10.01.2019

Firma: ....

Cognome .... **Nome** .... **A.A.** ....

Matricola .... **Corso di Laurea** ....

D1	
D2	
E1	
E2	
E3	
E4	
E5	
Σ	

Domanda 1

[4 punti]

(i) Dare la definizione di successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ crescente.

(ii) Dare un esempio di una successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tale che $\lim_{n\to+\infty} a_n = -5$.

Risposta

(i) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è crescente se $a_{n+1} \geq a_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$

(ii) p.e. per $a_n := \frac{-5n}{n+1}$ vale $\lim_{n\to+\infty} a_n = -5$

Domanda 2

[4 punti]

(i) Enunciare il teorema della media integrale.

(ii) Trovare un punto c del teorema della media integrale per la funzione $f(x) = x^3$ nell'intervallo $[2, 3]$.

Risposta

(i) Sia $f \in C[a,b]$. Allora esiste $c \in [a,b]$ t.c. $\int_a^b f(x)\,dx = f(c)\cdot(b-a)$

(ii) f è continua su $[2,3]$. Inoltre vale

$$\int_2^3 f(x)\,dx = \left[\frac{x^4}{4}\right]_2^3 = \frac{3^4-2^4}{4} = \frac{81-16}{4} = \frac{65}{4} \overset{!}{=} f(c) = c^3$$

$$\Rightarrow c = \sqrt[3]{\frac{65}{4}}$$

Esercizio 1

[5 punti]

Studiare il carattere della serie

$$S := \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{13+n^8}{67+n^3+n^9} =: a_n \geq n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

serie a termini positivi

Risoluzione

Per il principio di sostituzione vale

$a_n \sim \frac{n^8}{n^9} = \frac{1}{n}$ per $n \to +\infty$. Quindi per il criterio del confronto asintotico S e la serie armonica $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = +\infty$ hanno lo stesso carattere. Quindi anche

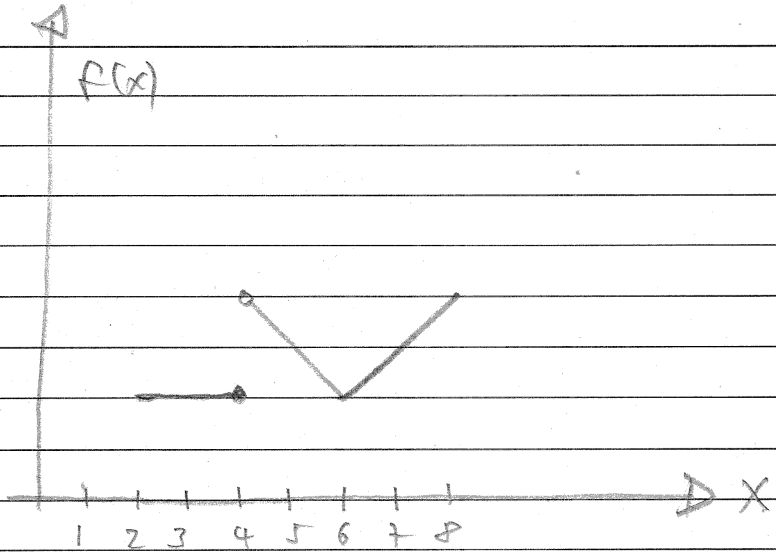
S diverge a $+\infty$

Esercizio 2

[5 punti]

Disegnare il grafico di una funzione $f : [2, 8] \to \mathbb{R}$ con $f'(3) = 0$, non continua in $x = 4$, con $f'(5) = -1$, con un punto angoloso in $x = 6$ e con $f'(7) = 1$.

Risoluzione



Esercizio 3

[5 punti]

Trovare il piano tangente in $(1,2)$ relativo alla funzione $f(x,y) = 5 + x^4y^3$.

Risoluzione

- $p(x,y) = f(1,2) + f_x(1,2)\cdot(x-1) + f_y(1,2)\cdot(y-2)$
- $f(1,2) = 5 + 1^4 \cdot 2^3 = 5+8 = \underline{13}$
- $f_x(x,y) = 4x^3 \cdot y^3 \Rightarrow f_x(1,2) = 4\cdot 1^3 \cdot 2^3 = 4\cdot 8 = \underline{32}$
- $f_y(x,y) = x^4 \cdot 3y^2 \Rightarrow f_y(1,2) = 1^4 \cdot 3 \cdot 2^2 = \underline{12}$

Quindi

$$p(x,y) = 13 + 32\cdot(x-1) + 12\cdot(y-2)$$

Esercizio 4

[4 punti]

Studiare il limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(e^x-1)^6 \cdot y^4}{x^{10}+y^{10}} =: f(x,y)$$

Risoluzione

Poniamo $y = mx$. Allora

$$\lim_{x\to 0} f(x,mx) = \lim_{x\to 0} \frac{(e^x-1)^6 \cdot m^4 \cdot x^4}{x^{10} + m^{10} \cdot x^{10}} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{e^x-1}{x}\right)^6 \cdot \frac{m^4}{1+m^{10}}$$

$$= \frac{m^4}{1+m^{10}}$$ cioè dipende da $m \in \mathbb{R}$

Quindi $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ <u>non</u> esiste.

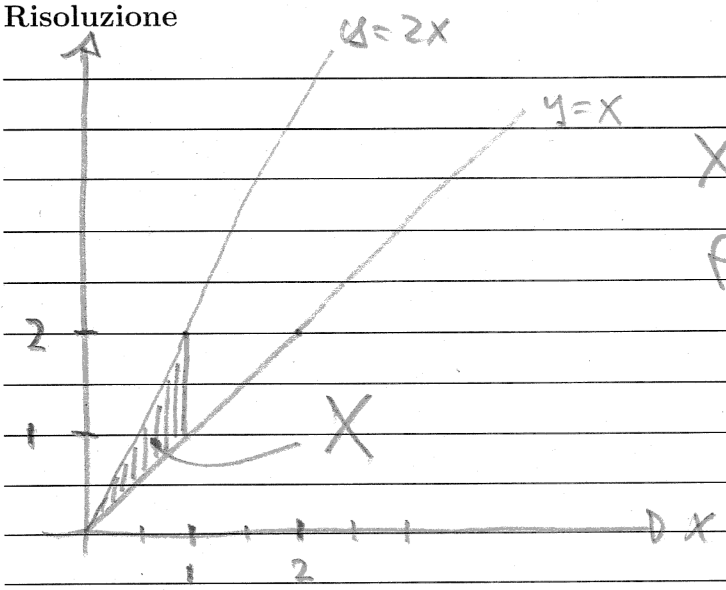
Esercizio 5

[5 punti]

Disegnare l'insieme $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 1, \quad x \le y \le 2x\}$. Calcolare l'integrale

$$I := \iint_X \underbrace{9x^3y^2}_{=: f(x,y)}\, dx\, dy.$$

Risoluzione



X è y-semplice e f è continua.

Quindi per il teorema di Fubini-Tonelli segue

$$I = \int_{x=0}^{1} \int_{y=x}^{2x} 9x^3 \cdot y^2 \, dy\, dx$$

$$= \int_{x=0}^{1} \overset{3}{\cancel{9}} \cdot x^3 \cdot \frac{y^3}{\cancel{3}}\Big|_{y=x}^{2x}$$

$$= 3 \cdot \int_0^1 x^3 \cdot (8x^3 - x^3)\, dx$$

$$= 21 \cdot \int_0^1 x^6 \, dx$$

$$= \frac{21}{7} \cdot x^7 \Big|_0^1 = 3 \cdot (1^7 - 0^7) = \underline{\underline{3}}$$