Analisi Matematica 1, Scritto A. Durata della prova: 2 ore **11.6.12**

Firma: ....

Cognome: .... **Nome:** ....

Matricola: .... **Corso di Laurea:** .... **Canale:** [A] [B] [C] [D]

D1	
D2	
E1	
E2	
E3	
E4	
E5	
Σ	

Domanda 1

[3 punti]

(i) Enunciare il teorema degli zeri.

(ii) Verificare che l'equazione $\underbrace{\ln(x-1)\cdot e^{x+1} = 2}_{(*)}$ ammette almeno una soluzione positiva.

Risposta

(i) Se $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ è continua e $f(a)\cdot f(b)<0$, allora $\exists\, c\in[a,b]$ con $f(c)=0$.

(ii) Sia $f(x) := \ln(x-1)\cdot e^{x+1}-2$ per $x>1$. Allora $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$ è continua e

$\lim_{x\to1^+} f(x) = (-\infty)\cdot e^2 - 2 = -\infty \Rightarrow \exists\, a>1$ con $f(a)<0$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = (+\infty)\cdot(+\infty)-2 = +\infty \Rightarrow \exists\, b>a$ con $f(b)>0$

$\xRightarrow{\text{teor. degli zeri}} \exists\, c\in[a,b]$

con $f(c)=0 \Leftrightarrow c$ è una sol. di $(*)$

Domanda 2

[3 punti]

Siano $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ due successioni tali che $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$ e $\lim_{n\to+\infty} b_n = +\infty$. Allora

[a] $\lim_{n\to+\infty} a_n b_n = 0$

[b] $\lim_{n\to+\infty} a_n b_n = +\infty$

[c] $\lim_{n\to+\infty} \sin(a_n)\, b_n$ non esiste

[d] $\lim_{n\to+\infty} a_n \cos(b_n) = 0$

Risposta

La successione $(\cos(b_n))_{n\in\mathbb{N}}$ è limitata,

quindi $\underbrace{a_n}_{\to 0}\cdot\cos(b_n)\to 0$ per $n\to+\infty$.

Quindi $\boxed{d}$

Esercizio 1

[3 punti]

Calcolare lo sviluppo di McLaurin di ordine 5 della funzione $f(x) = e^{1-\cos(x)}$.

Risoluzione

$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + o(t^2)$ per $t \to 0$

$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)$ per $x \to 0$ $\Rightarrow$

$1 - \cos(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + o(x^4) = \frac{x^2}{2} + o(x^3)$ per $x \to 0$ $\Rightarrow$

$e^{1-\cos(x)} = 1 + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24}\right) + \frac{\left(\frac{x^2}{2} + o(x^3)\right)^2}{2} + o\Big(\big(\underbrace{1-\cos(x)}_{\sim \frac{x^2}{2}}\big)^2\Big) = o(x^4)$

$= 1 + \frac{x^2}{2} + \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{24}\right)x^4 + o(x^4)$

$= \underbrace{1 + \frac{x^2}{2} + \frac{1}{12}x^4}_{= T_4(x)} + o(x^4)$

$= T_4(x) = T_5(x)$

$\uparrow$ poiché $f(x)$ è pari.

Esercizio 2

[4 punti]

Studiare al variare del parametro $l \in \mathbb{R}$ la continuità in $x_0 = 1$ della funzione

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3-2x^2-x+2}{\ln(x)} & \text{se } x \neq 1, \\ l & \text{se } x = 1. \end{cases}$$

Risoluzione

$\lim_{x \to 1} f(x) = \left(\frac{0}{0}\right) \overset{(H)}{=} \lim_{x \to 1} \frac{3x^2 - 4x - 1}{1/x}$

$= \frac{3-4-1}{1} = -2$

Quindi la funzione risulta continua per $l = -2$

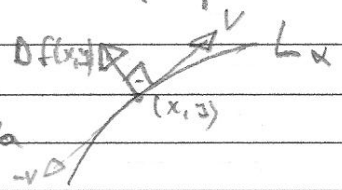
Esercizio 3

[3 punti]

Data la funzione $f(x,y) = \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9}$ calcolare un versore tangente alla curva di livello passante per il punto $(-4,3)$.

Risoluzione

Utilizziamo il fatto che il gradiente è perpendicolare sulla linea di livello. Quindi un versore che sta perpendicolare sul gradiente è tangente alla linea di livello. Qui abbiamo



$$Df(x,y) = \left(\frac{x}{8}, \frac{2y}{9}\right) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right) \leftarrow (x,y) = (-4,3)$$

$$\Rightarrow \left(2/3, 1/2\right) \perp Df(-4,3)$$

$$\Rightarrow v = \frac{\pm(2/3, 1/2)}{\|\pm(2/3, 1/2)\|} = \frac{\pm(2/3, 1/2)}{\sqrt{\frac{4}{9}+\frac{1}{4}}} = \pm\frac{6}{5}(2/3, 1/2) = \pm\left(4/5, 3/5\right)$$

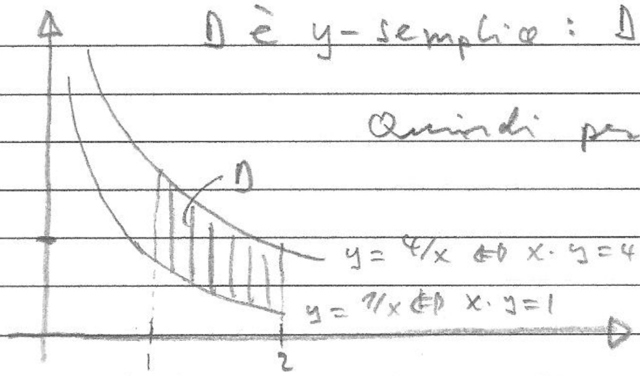
Esercizio 4

[4 punti]

Disegnare il dominio $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq xy \leq 4,\ 1 \leq x \leq 2\}$ e calcolare l'integrale doppio

$$I := \iint_D \frac{y}{x}\, dx\, dy$$

Risoluzione



D è y-semplice: $D = \{(x,y) \mid x \in [1,2],\ \frac{1}{x} \leq y \leq \frac{4}{x}\}$

Quindi per Fubini-Tonelli segue:

$$I = \int_1^2 \int_{y=1/x}^{4/x} \frac{y}{x}\, dy\, dx$$

$$= \int_1^2 \frac{y^2}{2x}\Bigg|_{y=1/x}^{y=4/x} dx$$

$$= \int_1^2 \frac{1}{2x}\left(\frac{16}{x^2} - \frac{1}{x^2}\right) dx = \int_1^2 \frac{15}{2} \cdot \frac{1}{x^3}\, dx$$

$$= \frac{15}{2}\left[\frac{-1}{2x^2}\right]_1^2 = \frac{15}{2}\left[-\frac{1}{8} + \frac{1}{2}\right] = \frac{45}{16}$$

Esercizio 5

[6 punti]

Trovare il dominio, eventuali simmetrie, zeri, punti di estremo locale ed asintoti della funzione $f(x) = \ln\left(\frac{1}{|x|} - 2x\right)$ e tracciarne un grafico approssimativo.

Risoluzione

• Dominio: $x \in dom(f) \iff x \neq 0$ e $\frac{1}{|x|} - 2x > 0 \iff$

$\begin{cases} 2x \cdot |x| < 1 \\ x \neq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x \cdot x < 1 \\ x > 0 \end{cases}$ opp. $\begin{cases} -2x \cdot x < 1 \\ x < 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x \in (0, \sqrt{1/2}) \text{ opp.} \\ x \in (-\infty, 0) \end{cases}$

$\Rightarrow$ Dom. di $f = (-\infty, 0) \cup (0, \sqrt{1/2})$

• Simmetrie: Non ci sono

• Zeri: $f(x) = 0 \iff \frac{1}{|x|} - 2x = 1 \iff 2x \cdot |x| + |x| - 1 = 0 \iff$

$\begin{cases} 2x^2 + x - 1 = 0,\ x > 0 \text{ opp.} \\ -2x^2 - x - 1 = 0,\ x < 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{1}{2} \text{ opp. } x = -1,\ x > 0 \\ \text{mai} \end{cases} \iff x = \frac{1}{2}$

• $f'(x) = \begin{cases} \left(\ln\left(\frac{-1}{x} - 2x\right)\right)', & x < 0 \\ \left(\ln\left(\frac{1}{x} - 2x\right)\right)', & x > 0 \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{-1 \cdot \left(\frac{1}{x^2} - 2\right)}{\frac{1}{x} + 2x}, & x < 0 \\ \dfrac{\left(-\frac{1}{x^2} - 2\right)}{\frac{1}{x} - 2x}, & x > 0 \end{cases}$

$= \begin{cases} \dfrac{2x^2 - 1}{2x^3 + x}, & x < 0 \\ \dfrac{+2x^2 + 1}{2x^3 - x}, & x > 0 \end{cases}$

$\Rightarrow f'(x) = 0 \iff \begin{cases} x^2 = 1/2,\ x < 0 \\ \text{opp.} \\ \text{mai} \end{cases} \iff x = -\sqrt{1/2}$

Inoltre $f'(x)$ cambia in $-\sqrt{1/2}$ segno da "$-$" a "$+$" $\Rightarrow x = -\sqrt{\frac{1}{2}}$ è un pto. di min. locale.

• Asintoti: $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \ln(+\infty) = +\infty$ ma $\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$

$\Rightarrow$ non $\exists$ asint. obl. per $x \to -\infty$

$\lim_{x \to 0^\pm} f(x) = \ln(+\infty) = +\infty$

$\lim_{x \to \sqrt{1/2}^-} f(x) = \ln(0^+) = -\infty$