Analisi Matematica 1, Scritto B. Durata della prova: 2 ore 11.6.12

Firma: ....

Cognome: .... **Nome:** ....

Matricola: .... **Corso di Laurea:** .... **Canale:** A B C D

D1	
D2	
E1	
E2	
E3	
E4	
E5	
Σ	

Domanda 1

[3 punti]

(i) Enunciare il teorema degli zeri.

(ii) Verificare che l'equazione $\underbrace{e^{x-1} \cdot \ln(x+1) = -2}_{(*)}$ ammette almeno una soluzione negativa.

Risposta

(i) Se $f \in C[a,b]$ con $f(a) \cdot f(b) < 0$, allora $\exists\, c \in [a,b]$ t.c. $f(c) = 0$

(ii) Sia $f(x) := e^{x-1} \cdot \ln(x+1) + 2$ per $x > -1$. Allora $f : (-1, +\infty) \to \mathbb{R}$ è continua e

$\lim_{x \to -1^+} f(x) = e^{-2} \cdot (-\infty) + 2 = -\infty \Rightarrow \exists\, a > -1$ con $f(a) < 0$

inoltre $f(0) = e^{-1} \cdot \ln(1) + 2 = 2$. Quindi $f \in C[a, 0]$ e

$f(a) \cdot f(0) < 0 \Rightarrow \exists\, c \in (a, 0)$ con $f(c) = 0 \Leftrightarrow (*)$

Domanda 2

[3 punti]

Siano $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ due successioni tali che $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$ e $\lim_{n\to+\infty} b_n = 0$. Allora

- [x] a $\lim_{n\to+\infty} a_n \cos(b_n) = +\infty$
- b $\lim_{n\to+\infty} a_n b_n = +\infty$
- c $\lim_{n\to+\infty} \sin(a_n)\, b_n$ non esiste
- d $\lim_{n\to+\infty} a_n b_n = 0$

Risposta

$b_n \to 0 \Rightarrow \cos(b_n) \to \cos(0) = 1$ per $n \to +\infty \Rightarrow$

$a_n \cdot \cos(b_n) \to (+\infty) \cdot 1 = +\infty$ per $n \to +\infty$

quindi $\boxed{a}$.

Esercizio 1

[3 punti]

Calcolare lo sviluppo di McLaurin di ordine 5 della funzione $f(x) = e^{x\cdot\sin(x)}$.

Risoluzione

• $e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + o(t^2) + o(t^2)$ per $t \to 0$

$x \cdot \sin(x) = x \cdot \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right) = x^2 - \frac{x^4}{6} + o(x^5)$

$= x^2 + o(x^3)$ per $x \to 0$

$\Rightarrow e^{x\cdot\sin(x)} = 1 + \left(x^2 - \frac{x^4}{6}\right) + \underbrace{\frac{(x^2+o(x^3))^2}{2}} + o((\underbrace{x\cdot\sin(x)}_{\sim x^2})^2)$ $= o(x^4)$

$= 1 + x^2 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\right)x^4 + o(x^4)$

$= \underbrace{1 + x^2 + \frac{1}{3}x^4} + o(x^4)$

$= T_4(x) = T_5(x)$

poichè $f(x)$ è pari

Esercizio 2

[4 punti]

Studiare al variare del parametro $l \in \mathbb{R}$ la continuità in $x_0 = 1$ della funzione

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(x)}{x^3+2x^2-x-2} & \text{se } x \neq 1, \\ l & \text{se } x = 1. \end{cases}$$

Risoluzione

$\lim_{x\to 1} f(x) = \left(\frac{0}{0}\right) \overset{(H)}{=} \lim_{x \to 0} \frac{1/x}{3x^2+4x-1} = \frac{1/1}{3+4-1} = \frac{1}{6}$

Quindi la funzione risulta continua in $x_0 = 1$

$\Leftrightarrow l = \frac{1}{6}$

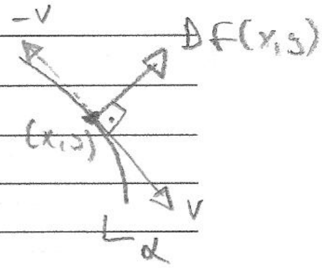
Esercizio 3

[3 punti]

Data la funzione $f(x,y) = \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16}$ calcolare un versore tangente alla curva di livello passante per il punto $(3,4)$.

Risoluzione

Ragionando come sul compito A segue:



$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{2x}{9}, \frac{y}{8}\right) \underset{(x,y)=(3,4)}{=} \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{2}\right)$$

$\Rightarrow$ il vettore $\left(-\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right)$ è tangenziale alla curva di livello $\Rightarrow$

$$v = \pm \frac{\left(-\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right)}{\left\|\left(-\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right)\right\|} = \pm\frac{6}{5}\cdot\left(-\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right) = \pm\left(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$$

è il versore cercato

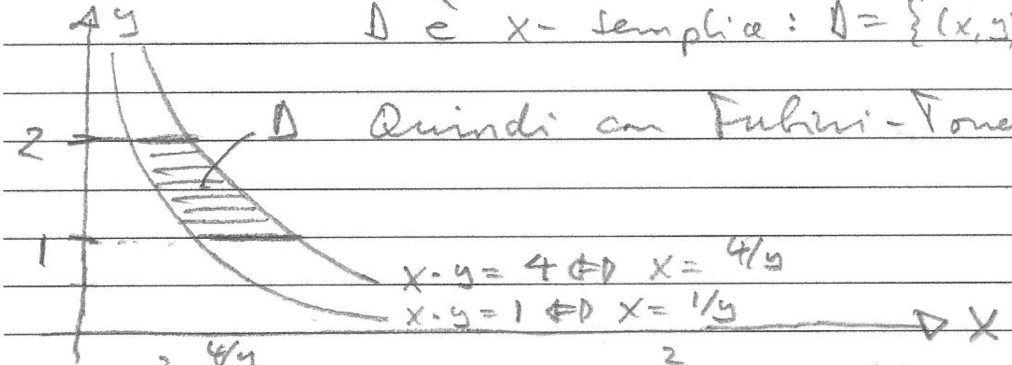
Esercizio 4

[4 punti]

Disegnare il dominio $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \le xy \le 4,\ 1 \le y \le 2\}$ e calcolare l'integrale doppio

$$I = \iint_D xy\,dx\,dy$$

Risoluzione



D è x-semplice: $D = \{(x,y) \mid y \in [1,2],\ \frac{1}{y} \le x \le \frac{4}{y}\}$

Quindi con Fubini-Tonelli segue

$$I = \int_{y=1}^{2}\int_{x=1/y}^{4/y} x\cdot y\,dx\,dy = \int_1^2 \frac{x^2}{2}\cdot y\Big|_{x=1/y}^{4/y} dy$$

$$= \frac{1}{2}\int_1^2 y\cdot\left(\frac{16}{y^2} - \frac{1}{y^2}\right) dy = \frac{15}{2}\cdot\int_1^2 \frac{1}{y}\,dy =$$

$$= \frac{15}{2}\ln(y)\Big|_1^2 = \frac{15}{2}\left(\ln(2) - \ln(1)\right) = \frac{15}{2}\cdot\ln(2)$$

Esercizio 5

[6 punti]

Trovare il dominio, eventuali simmetrie, zeri, punti di estremo locale ed asintoti della funzione $f(x) = \ln\left(x + \dfrac{2}{|x|}\right)$ e tracciarne un grafico approssimativo.

Risoluzione

• Dominio: $x \in \text{dom. } f \iff x \neq 0$ e $x + \frac{2}{|x|} > 0 \iff \begin{cases} x \neq 0 \text{ e} \\ x \cdot |x| > -2 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} x^2 > -2 \text{ e } x > 0 \text{ opp.} \\ x^2 < 2 \text{ e } x < 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x > 0 \text{ opp.} \\ -\sqrt{2} < x < 0 \end{cases}$

$\Rightarrow$ dominio di $f = (-\sqrt{2}, 0) \cup (0, +\infty)$.

• Simmetrie: Non ci sono

• Zeri: $f(x) = 0 \iff x + \frac{2}{|x|} = 1 \iff x \cdot |x| - |x| + 2 = 0$

$\iff \begin{cases} -x^2 + x + 2 = 0 \text{ e } x < 0 \text{ opp.} \\ x^2 - x + 2 = 0 \text{ e } x > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} (x = -1 \text{ o } 4) \text{ e } x < 0 \text{ opp.} \\ \text{mai} \end{cases}$

$\iff x = -1$.

• $f'(x) = \begin{cases} \left(\ln\left(x - \frac{2}{x}\right)\right)' & \text{se } x < 0 \\ \left(\ln\left(x + \frac{2}{x}\right)\right)' & \text{se } x > 0 \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{1 + \frac{2}{x^2}}{x - 2/x} & \text{se } x < 0 \\ \dfrac{1 - \frac{2}{x^2}}{x + 2/x} & \text{se } x > 0 \end{cases}$

$= \begin{cases} \dfrac{x^2 + 2}{x^3 - 2} & \text{se } x < 0 \\ \dfrac{x^2 - 2}{x^3 + 2} & \text{se } x > 0 \end{cases}$.

$\Rightarrow f'(x) = 0 \iff \begin{cases} x^2 + 2 = 0 \text{ e } x < 0 \\ \text{opp.} \\ x^2 - 2 = 0 \text{ e } x > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \text{mai} \\ \text{opp.} \\ x = +\sqrt{2} \end{cases}$

Inoltre $f'(x)$ cambia segno in $x = +\sqrt{2}$ da "$-$" a "$+$"

$\Rightarrow x = +\sqrt{2}$ è un pto. di minimo locale.

• Asintoti: $\lim_{x \to -\sqrt{2}^+} f(x) = \ln(0^+) = -\infty$ ma

$\lim_{x \to 0^{+/-}} f(x) = \ln(+\infty) = +\infty$,

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ln(+\infty) = +\infty$

ma $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ quindi

non $\exists$ un asintoto obli.

per $x \to +\infty$.