Analisi Matematica 1. Durata della prova: 2 ore 11.9.18

Firma: ..........

Cognome .............................. Nome .................................... A.A. ..........

Matricola .................................... Corso di Laurea ................................

| | |
|---|---|
| D1 | |
| D2 | |
| E1 | |
| E2 | |
| E3 | |
| E4 | |
| E5 | |
| $\Sigma$ | |

## Domanda 1

[4 punti]

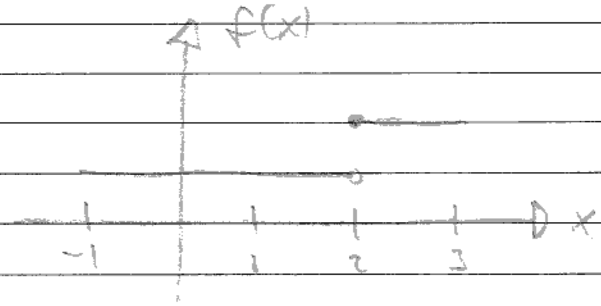
(i) Dare la definizione di funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua in $x = c$.

(ii) Disegnare il grafico di una funzione $f : [-1, 3] \to \mathbb{R}$ continua in $x = 0$ e non continua in $x = 2$.

**Risposta**

(i) $f$ è continua in $x=c$ se $\forall$ successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con $\lim_{n\to+\infty} x_n = c$ segue $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f(c)$

(ii)




## Domanda 2

[4 punti]

(i) Enunciare il teorema degli zeri.

(ii) Verificare che l'equazione $x^2 + x^3 = 7$ ammette una soluzione nell'intervallo $[1, 2]$.

**Risposta**

(i) Se $f \in C[a,b]$ con $f(a)\cdot f(b) < 0$ allora

$\exists\, c \in (a,b)$ t.c. $f(c) = 0$

(ii) $x^2 + x^3 = 7 \iff x^2 + x^3 - 7 =: f(x) = 0$.

Inoltre: • $f : [1,2] \to \mathbb{R}$ è continua

• $f(1) = 1^2 + 1^3 - 7 = -5 < 0$

$f(2) = 2^2 + 2^3 - 7 = 5 > 0$ $\Big\} \Rightarrow \exists\, c \in [1,2]$ con $f(c) = 0$

$\iff c^2 + c^3 = 7$.

## Esercizio 1

[4 punti]

Studiare il carattere della serie

$$S := \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k! + 2!}{(k+2)!}$$

### Risoluzione

- $\frac{k!+2}{(k+2)!} \sim \frac{k!}{k!\cdot(k+1)\cdot(k+2)} = \frac{1}{(k+1)(k+2)} \sim \frac{1}{k^2}$ per $k \to +\infty$
- $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$ converge.

Quindi per il criterio del confronto asintotico anche la serie $\boxed{S \text{ converge.}}$

## Esercizio 2

[5 punti]

Calcolare, se esiste, il seguente limite

$$\ell := \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x) - \cosh(x) + e^{-x}}{\sinh(x)\cdot\big(1-\cos(x)\big)}$$

### Risoluzione

- $\sinh(x) \sim x$ e $1-\cos(x) \sim \frac{x^2}{2}$ per $x \to 0$.

$$\Rightarrow \quad \ell = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x) - \cosh(x) + e^{-x}}{x \cdot \frac{x^2}{2}}$$

- Numeratore lo sviluppo fino al 3° ordine:

$$\sin(x) - \cosh(x) + e^{-x} = \cancel{x} - \frac{x^3}{6} - \cancel{1} - \cancel{\frac{x^2}{2}} + \cancel{1} - \cancel{x} + \cancel{\frac{(-x)^2}{2}} + \frac{(-x)^3}{6} + o(x^3)$$

$$= -\frac{1}{3}x^3 + o(x^3) \sim -\frac{1}{3}x^3$$

$$\Rightarrow \quad \ell = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{3}x^3}{\frac{x^3}{2}} = \boxed{-\frac{2}{3}}$$

## Esercizio 3

[5 punti]

Trovare il piano tangente in $(2,-1)$ al grafico della funzione $f(x,y) = 3 - \sqrt{5 + x^2y^6}$ .

**Risoluzione**

• $P(x,y) = f(2,-1) + f_x(2,-1)\cdot(x-2) + f_y(2,-1)\cdot(y+1)$

• $f(2,-1) = 3 - \sqrt{5+2^2\cdot(-1)^6} = 3-3=0$

• $f_x(x,y) = -\frac{1}{2}(5+x^2\cdot y^6)^{-1/2}\cdot 2xy^6 \Rightarrow f_x(2,-1) = -\frac{2\cdot 2\cdot(-1)^6}{2\cdot 3} = -\frac{2}{3}$

• $f_y(x,y) = -\frac{1}{2}(5+x^2\cdot y^6)^{-1/2}\cdot x^2\cdot 6y^5 \Rightarrow f_y(2,-1) = -\frac{2^2\cdot 6\cdot(-1)^5}{2\cdot 3} = 4$

$\Rightarrow \boxed{P(x,y) = -2/3\cdot(x-2) + 4\cdot(y+1)}$

## Esercizio 4

[4 punti]

Calcolare la derivata direzionale $D_vf(-1,2)$ per la funzione $f(x,y) = \ln(2+x^2y)$ e il versore $v = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$.

**Risoluzione**

• $D_v f(-1,2) = f_x(-1,2)\cdot\frac{1}{2} + f_y(-1,2)\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$

• $f_x(x,y) = \frac{2xy}{2+x^2\cdot y} \Rightarrow f_x(-1,2) = \frac{2\cdot(-1)\cdot 2}{2+(-1)^2\cdot 2} = \frac{-4}{4} = -1$

• $f_y(x,y) = \frac{x^2\cdot 1}{2+x^2\cdot y} \Rightarrow f_y(-1,2) = \frac{(-1)^2}{4} = \frac{1}{4}$

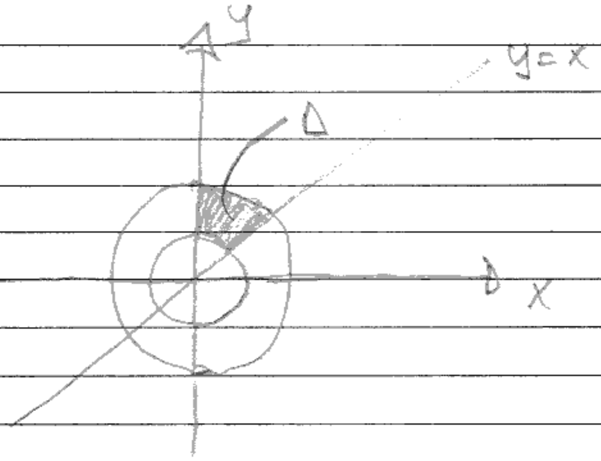
$\Rightarrow D_v f(-1,2) = -1\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \boxed{\frac{\sqrt{3}}{8} - \frac{1}{2}}$

## Esercizio 5 [6 punti]

Disegnare l'insieme $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4,\ 0 \leq x \leq y\}$ e calcolare l'integrale

$$I := \iint_D \frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dx dy\ .$$

**Risoluzione**




D corrisponde a $D' = [1,2] \times [\pi/4, \pi/2]$ in coordinate polari. Quindi

$$I = \int_1^2 \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\rho \cdot \cos(\vartheta) + \rho \cdot \sin(\vartheta)}{\cancel{\rho}} \cdot d\vartheta\, \rho\, d\rho$$

$$= \int_1^2 \rho\, d\rho \cdot \int_{\pi/4}^{\pi/2} \cos(\vartheta) + \sin(\vartheta)\, d\vartheta$$

$$= \left[\frac{\rho^2}{2}\right]_1^2 \cdot \Big[\sin(\vartheta) - \cos(\vartheta)\Big]_{\pi/4}^{\pi/2}$$

$$= \frac{2^2-1}{2} \cdot \left[1 - \frac{\sqrt{2}}{2} - 0 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$$

$$= \boxed{\frac{3}{2}}$$