Analisi Matematica 1. Durata della prova: 2 ore **11.07.2019**

Firma: ....

Cognome .... **Nome** .... **A.A.** ....

Matricola .... **Corso di Laurea** ....

D1	
D2	
E1	
E2	
E3	
E4	
E5	
Σ	

Domanda 1

[4 punti]

(i) Dare la definizione di successione limitata.

(ii) Dare un esempio di successione limitata e un esempio di successione illimitata.

Risposta

(i) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è limitata se $\exists\, M \in \mathbb{R}$ t.c.

$|a_n| \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(ii) $a_n := (-1)^n$ definisce una successione limitata (p.e. $M=1$)

$a_n := n$ — || — non limitata

Domanda 2

[4 punti]

(i) Enunciare il teorema della media integrale.

(ii) Verificare che

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \leq x \leq 2 \\ x-1 & \text{se } 2 < x \leq 3 \end{cases}$$

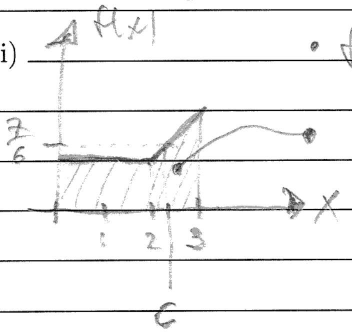
soddisfa le ipotesi del teorema della media integrale e trovare il punto c del teorema per tale funzione.

Risposta

(i) Se $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ è continua allora $\exists\, c \in [a,b]$ t.c.

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)\cdot(b-a)$$

(ii)



• f è continua visto che $\lim_{x\to 2^+} f(x) = 1 = f(2)$

$$\int_0^3 f(x) = 3\tfrac{1}{2} = \frac{7}{2} \overset{!}{=} f(c)\cdot(3-0)$$

$$\Leftrightarrow f(c) = \frac{7}{6}$$

$\quad\quad\quad\quad\;\; \| $

$\quad\quad\quad\; c-1$

$$\Leftrightarrow c = 1 + \frac{7}{6} = \frac{13}{6} = 2{,}1\overline{6}$$

Esercizio 1

[5 punti]

Studiare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^n}{(4n+1)^n} =: a_n \geq 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$$

Risoluzione

Applicando il criterio della radice risulta

$$\sqrt[n]{a_n} = \frac{n}{4n+1} \to \frac{1}{4} = q < 1$$

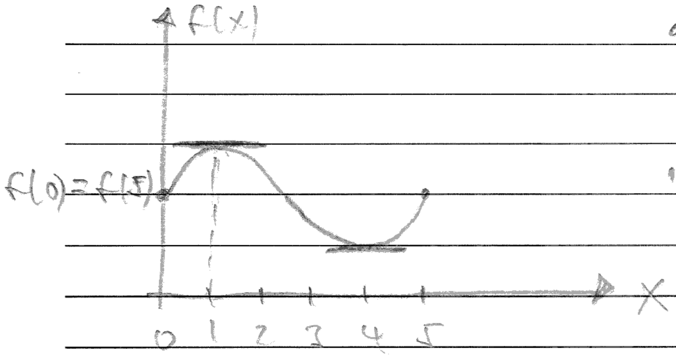
$\Rightarrow$ la serie converge

Esercizio 2

[5 punti]

Disegnare il grafico di una funzione $f : [0,5] \to \mathbb{R}$ continua in $[0,5]$ e derivabile in $(0,5)$, con $f(1) > f(0) = f(5) > f(4)$ e tale che f' si annulla solo nei punti $x = 1$ e $x = 4$. Stabilire se f ammette massimi e minimi e giustificare la risposta.

Risoluzione



- f ammette min e max per il teorema di Weierstraß
- Per il teorema di Fermat gli unici candidati per i punti di min e max sono
  - 0, 5 (estremi dell'intervallo)
  - 1, 4 (punti critici)
- Visto che 0 e 5 non sono pti. di min e max, allora
  - $x = 1$ è il pto di max
  - $x = 4$ —"— min

  di f.

Esercizio 3

[5 punti]

Calcolare, se esistono, le derivate parziali della funzione $f(x,y) = \sqrt{|x^2 - xy|}$ nel punto $(0,0)$. Stabilire se f è differenziabile in $(0,0)$.

Risoluzione

- $f_x(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{\overbrace{f(h,0)}^{=\sqrt{|h|^2}} - \overbrace{f(0,0)}^{=0}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{|h|}{h}$ <u>non</u> esiste

- $f_y(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{\overbrace{f(0,h)}^{0} - \overbrace{f(0,0)}^{0}}{h} = 0$

$\Rightarrow$ f <u>non</u> è derivabile in $(0,0)$

$\Rightarrow$ f <u>non</u> è differenziabile in $(0,0)$

Esercizio 4

[4 punti]

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile e si consideri la funzione $F(x,y) = f(2\cos y + e^{(y-1)x})$. Sapendo che $f'(3) = \pi$, calcolare il gradiente $\nabla F(0,0)$.

Risoluzione

Per la regola della catena segue

- $F_x(x,y) = f'(2\cos y + e^{(y-1)x}) \cdot e^{(y-1)\cdot x} \cdot (y-1)$

- $F_y(x,y) = f'(2\cos y + e^{(y-1)x}) \cdot ((-2)\sin y + e^{(y-1)x} \cdot x)$

$\Rightarrow \nabla F(0,0) = (F_x(0,0), F_y(0,0)) = (f'(3) \cdot 1 \cdot (-1), f'(3) \cdot 0)$

$= \underline{\underline{(-\pi, 0)}}$

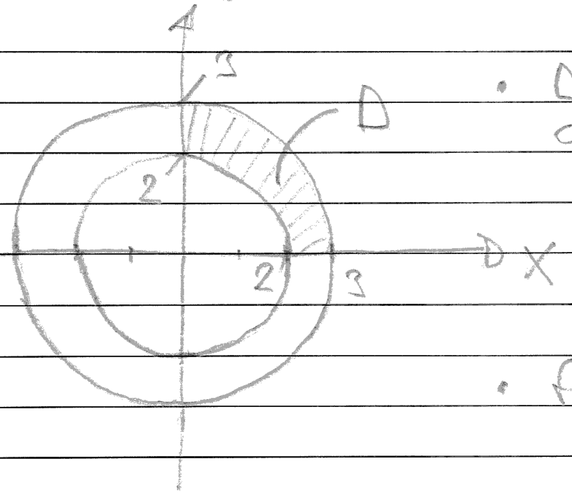
Esercizio 5

[5 punti]

Disegnare l'insieme $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 - 9 \leq 0,\ x^2 + y^2 - 4 \geq 0,\ x > 0,\ y > 0\}$. Calcolare l'integrale

$$I := \iint_D \underbrace{\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}}_{f(x,y)}\,dx\,dy$$

Risoluzione



- D in coordinate polari corrisponde a $D' = [2,3] \times [0, \frac{\pi}{2}]$
- $f : D \to \mathbb{R}$ è continua

Quindi per il teorema di Fubini-Tonelli segue:

$$I = \int_2^3 \int_0^{\pi/2} \frac{\rho \cos\vartheta \cdot \rho \sin\vartheta}{\rho} \cdot \rho \, d\vartheta \, d\rho$$

$$= \int_2^3 \rho^2 \, d\rho \cdot \int_0^{\pi/2} \sin\vartheta \cdot \overbrace{\cos\vartheta}^{\sin'(\vartheta)} \, d\vartheta$$

$\int f \cdot f' = \frac{f^2}{2} + c$

$$= \left[\frac{\rho^3}{3}\right]_2^3 \cdot \left[\frac{\sin^2\vartheta}{2}\right]_0^{\pi/2}$$

$$= \frac{1}{6}(27-8) \cdot \Big[\underbrace{\sin^2(\pi/2)}_{=1} - \underbrace{\sin^2(0)}_{=0}\Big]$$

$$= \frac{19}{6}$$