Analisi Matematica 1, Scritto 1-A. Durata della prova: 2 ore 11.9.13

Cognome .... Nome .... A.A. ....

Matricola .... Corso di Laurea .... Canale [A] [B] [C] [D]

D1	
D2	
E1	
E2	
E3	
E4	
E5	
Σ	

Domanda 1

[4 punti]

(i) Enunciare il criterio del rapporto per serie numeriche.

(ii) Risulta utile applicare tale criterio alla serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{1+n^2}$?

Risposta

(i) Vedi libro/dispense

(ii) La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{1+n^2}$ è a termini strettamente positivi, quindi si può applicare il criterio del rapporto:
$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1+n^2}{1+(n+1)^2} = 1$, dunque il criterio del rapporto non risulta utile

Domanda 2

[5 punti]

(i) Enunciare il teorema della media integrale.

(ii) Determinare il valor medio integrale della funzione $f(x) = x \ln x$ nell'intervallo $[1, 4]$.

Risposta

(i) Vedi libro/dispense

(ii) $\exists\, c \in (1,4)$ tale che
$\int_1^4 x \ln x \, dx = f(c)\cdot 3$, poiché f è continua in $[1,4]$

$\int x \ln x \, dx = \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{2}\int x^2 \frac{1}{x}\, dx = \frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{1}{4}x^2 + c$

dunque $f(c) = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{2}x^2\left(\ln x - \frac{1}{2}\right)\right]_1^4 = \frac{1}{6}\left[16\left(\ln 4 - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\right] =$

$= \frac{1}{6}\left(32 \ln 2 - \frac{15}{2}\right)$

Esercizio 1

[4 punti]

Calcolare

$$\lim_{x\to+\infty} \left(1+\sin\frac{3}{x}\right)^x$$

Risoluzione

F.I. 1^∞ $\quad L = \lim_{x\to+\infty} e^{x\ln\left(1+\text{sen}\frac{3}{x}\right)}$

poiché $\lim_{x\to+\infty} x\ln\left(1+\text{sen}\frac{3}{x}\right) =$

$$= \lim_{x\to+\infty} \underbrace{\frac{\ln\left(1+\text{sen}\frac{3}{x}\right)}{\text{sen}\frac{3}{x}}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\frac{3\,\text{sen}\frac{3}{x}}{3\frac{1}{x}}}_{\to 1} = 3$$

$L = e^3$

Esercizio 2

[4 punti]

Studiare la continuità in $(-\infty, 0)$ della funzione

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2e^{x+1}}{\sqrt{x^2+3}} & \text{se } x < -1, \\ \alpha\ln(1-x) & \text{se } -1 \leq x < 0 \end{cases}$$

al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$.

Risoluzione

$f_1(x) = \frac{2e^{x+1}}{\sqrt{x^2+3}}$ è continua per $x < -1$

$f_2(x) = \alpha\ln(1-x)$ è continua per $-1 \leq x < 0$ e $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

Dobbiamo controllare la continuità di $f(x)$

in $x = -1$, cioè

$\lim_{x\to -1^-} f_1(x) = f_2(-1) = \alpha\ln 2$

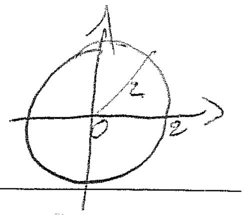
poiché $\lim_{x\to -1^-} f_1(x) = \frac{2}{2} = 1$, $f(x)$ risulta continua

in $(-\infty, 0)$ se $\alpha = \frac{1}{\ln 2}$

Esercizio 3

[4 punti]

Calcolare l'integrale $\iint_D \sqrt{4-x^2-y^2}\,dxdy$, dove $D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \le 4\}$.



Risoluzione

passiamo a coordinate polari

$$\iint_D \sqrt{4-x^2-y^2}\,dx\,dy = \int_0^2\int_0^{2\pi} \sqrt{4-\rho^2}\,\rho\,d\rho\,d\varphi =$$

$$= 2\pi\left(-\frac{1}{2}\int_0^2 (4-\rho^2)^{\frac{1}{2}}\,d(4-\rho^2)\right) = -\pi\,\frac{1}{\frac{1}{2}+1}(4-\rho^2)^{\frac{3}{2}}\Big]_0^2 =$$

$$= -\frac{2}{3}\pi(0-8) = \frac{16}{3}\pi$$

Esercizio 4

[5 punti]

Studiare la continuità, la derivabilità e la differenziabilità in $(x_0,y_0)=(0,0)$ della funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{e^{x^2+y^2}+y^3-1}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y)\neq(0,0), \\ 0 & \text{se } (x,y)=(0,0). \end{cases}$$

Risoluzione

Passiamo a coordinate polari nel limite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$

$$\lim_{\rho\to0} \frac{e^{\rho^2}+\rho^3\operatorname{sen}^3\varphi-1}{\rho^2} = \lim_{\rho\to0}\frac{\cancel{1}+\rho^2+o(\rho^2)+\rho^3\operatorname{sen}^3\varphi-\cancel{1}}{\rho^2} = 1$$

Dunque f non è continua in (0,0) e quindi non è differenziabile

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) \overset{?}{=} \lim_{h\to0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to0}\frac{e^{h^2}-1}{h^2\cdot h} = \lim_{h\to0}\frac{1}{h}\ \nexists$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) \overset{?}{=} \lim_{k\to0}\frac{f(0,k)-f(0,0)}{k} = \lim_{k\to0}\frac{e^{k^2+k^3}-1}{k^2\cdot k} = \cancel{\lim_{k\to0} 1+k^2+k^2}$$

$$= \lim_{k\to0}\frac{\cancel{1}+k^2+o(k^2)+k^3-\cancel{1}}{k^3} = \lim_{k\to0}\frac{1}{k}\ \nexists$$

Esercizio 5

[6 punti]

Trovare il dominio, eventuali asintoti, intervalli di monotonia e punti di estremo locale della funzione $f(x) = \dfrac{1}{2+\sqrt{3x+4}}$ e tracciarne un grafico approssimativo.

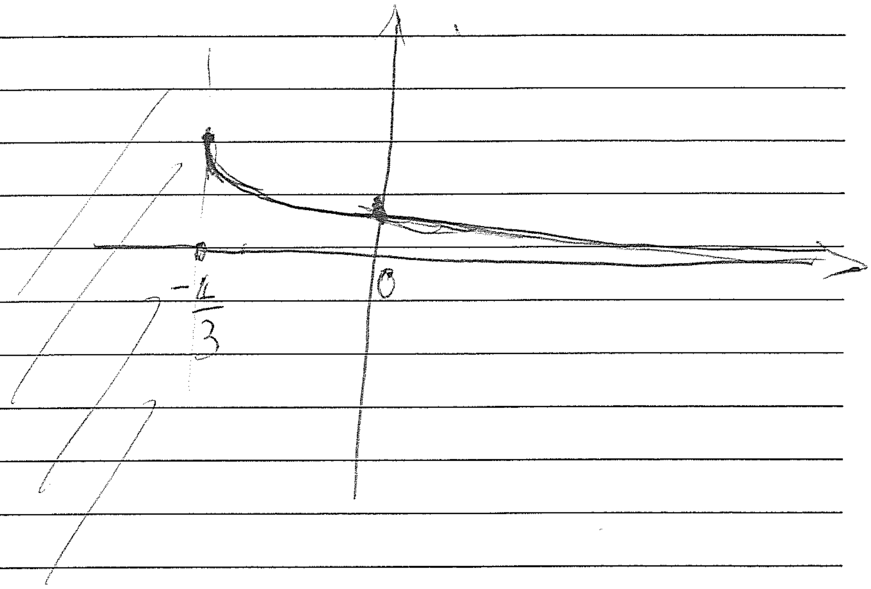
Risoluzione

$D_f = \{3x+4 \geq 0\} = \{x \geq -\frac{4}{3}\} = \left[-\frac{4}{3}, +\infty\right)$

$f\left(-\frac{4}{3}\right) = \frac{1}{2}$

$f(0) = \frac{1}{4}$

$f(x) > 0$ in D_f



$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$

$f'(x) = -\dfrac{1}{(3+\sqrt{4+3x})^2} \dfrac{3}{2\sqrt{3x+4}} = -\dfrac{3}{2} \dfrac{1}{(3+\sqrt{3x+4})^2\sqrt{3x+4}}$

$f(x)$ risulta derivabile in $\left(-\frac{4}{3}, +\infty\right)$ con $f'(x) < 0$

$\lim_{x \to -\frac{4}{3}^+} f'(x) = -\infty$