

Cognome Nome
 Matricola Corso di Laurea

Domanda 1

[4 punti]

D1	
D2	
E1	
E2	
E3	
E4	
Σ	

- (i) Dare la definizione di $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 3$.
 (ii) Dare un esempio di una successione a_n tale che $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 3$.

Risposta

(i) _____
 $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ t.c. } |3 - a_n| < \varepsilon \forall n \geq n_0$

(ii) _____
 $a_n = \frac{3n}{n+1}, n \in \mathbb{N}$

Domanda 2

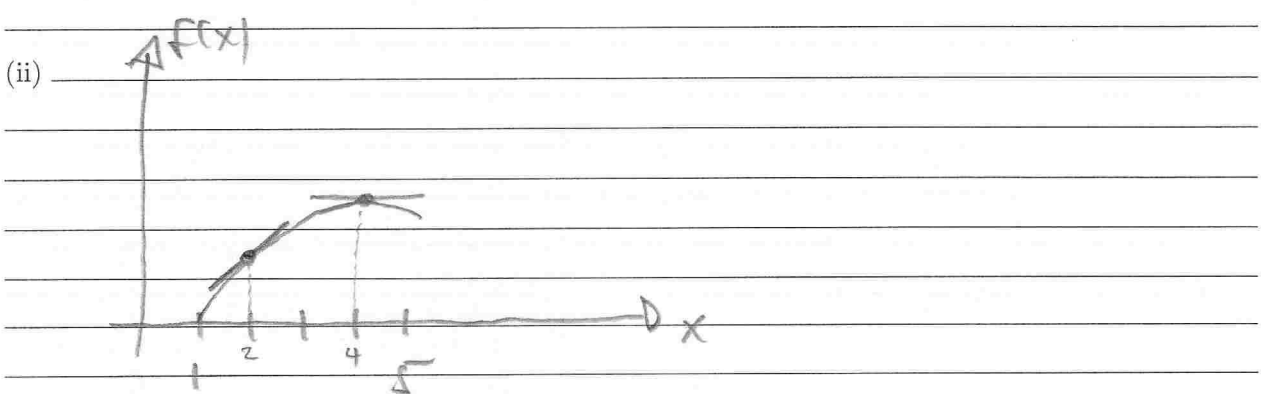
[4 punti]

- (i) Dare la definizione di derivata prima in x_0 per $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.
 (ii) Disegnare il grafico di una funzione $f : [1, 5] \rightarrow \mathbb{R}$ con $f'(2) = 1$ e $f'(4) = 0$.

Risposta

(i) _____

 ch. compito 2 CFU



Esercizio 1

[6 punti]

Studiare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \sin\left(\frac{n^4}{n^2+n^6}\right)$$

Risoluzione

• $n^2+n^6 \sim n^6$ per $n \rightarrow +\infty \Rightarrow$

$$\frac{n^4}{n^2+n^6} \sim \frac{n^4}{n^6} = \frac{1}{n^2} \rightarrow 0 \text{ per } n \rightarrow +\infty$$

$$(x = \frac{n^4}{n^2+n^6})$$

• $\sin(x) \sim x$ per $x \rightarrow 0 \Rightarrow$

$$\sin\left(\frac{n^4}{n^2+n^6}\right) \sim \frac{n^4}{n^2+n^6} \sim \frac{1}{n^2}$$

• $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ converge \Rightarrow (per il criterio del

comparato asintotico) $\sum_{n=1}^{+\infty} \sin\left(\frac{n^4}{n^2+n^6}\right)$ converge.

Esercizio 2

[6 punti]

Studiare la convergenza o la divergenza del seguente integrale improprio. Nel caso converga, calcolarne il valore.

$$\int_9^{+\infty} \frac{1}{(x-8)^{12}} dx = \frac{1}{11}$$

Risoluzione

cf. capitolo 9 CFU

Esercizio 3

[6 punti]

Trovare la retta tangente in $x_0 = 2$ alla funzione $f(x) = 5 + x^4 + \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$.

Risoluzione

$$\bullet f(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

$$\bullet f(x_0) = 5 + 2^4 + \cos(\pi) = 5 + 16 - 1 = 20$$

$$\bullet f'(x) = 4x^3 - \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) \cdot \frac{\pi}{2} \Rightarrow f'(x_0) = 4 \cdot 2^3 - 0 \cdot \frac{\pi}{2} \\ = 4 \cdot 8 = 32$$

Quindi $f(x) = 20 + 32(x - 2)$

Esercizio 4

[6 punti]

Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x) - x}{x \cdot \ln(1 + x^2)}$$

Risoluzione

Denominatore: $\ln(1+t) \sim t$ per $t \rightarrow 0$ $\stackrel{(t=x^2)}{\sim} 0$

$$\ln(1+x^2) \sim x^2 \text{ per } x \rightarrow 0$$

$$\Rightarrow x \cdot \ln(1+x^2) \sim x \cdot x^2 = x^3 \text{ per } x \rightarrow 0$$

\Rightarrow Numeratore da sviluppare fino al 3° ordine

$$\text{Numeratore: } \sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \text{ per } x \rightarrow 0$$

$$\Rightarrow \sin(x) - x = -\frac{x^3}{6} + o(x^3) \sim -\frac{x^3}{6} \text{ per } x \rightarrow 0$$

$$\Rightarrow \frac{\sin(x) - x}{x \cdot \ln(1+x^2)} \sim \frac{-\frac{x^3}{6}}{x^3} = -\frac{1}{6} \text{ per } x \rightarrow 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x) - x}{x \cdot \ln(1+x^2)} = -\frac{1}{6}$$