Esercizio 5

[5 punti]

Studiare la continuità, la derivabilità e la differenziabilità in $(x_0, y_0) = (0,0)$ della funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{5x^2\sin(y^2)}{x^4+y^4} + 3y & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Risoluzione

$f(x,y)$ è definita $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Poiché $f(0,0) = 0$, f è continua in $(0,0)$

$\iff \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$

Per $y = x \neq 0$ e $x \to 0$

$$f(x,x) = \frac{5x^2 \operatorname{sen}(x^2)}{2x^4} + \underbrace{3x}_{\to 0}$$

Poiché $\operatorname{sen}(x^2) \sim x^2$ per $x \to 0$

il termine $\frac{5x^2 \operatorname{sen}(x^2)}{2x^4}$ è asintotico a $\frac{5\cancel{x^4}}{2\cancel{x^4}}$

$\Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x,x) = \frac{5}{2} \neq 0$

$\Rightarrow$ f non è continua in $(0,0)$.

Pertanto f non è differenziabile in $(0,0)$, in quanto se fosse differenziabile, allora sarebbe continua in $(0,0)$.

DERIVATE PARZIALI

•) $\frac{f(x,0) - f(0,0)}{x} = \frac{0-0}{x} = \frac{0}{x} = 0 \quad \forall x \neq 0 \Rightarrow f_x(0,0)$ esiste e vale 0

•) $\frac{f(0,y) - f(0,0)}{y} = \frac{3y}{y} = 3 \Rightarrow f_y(0,0)$ esiste e vale 3

Analisi Matematica 1, Scritto 1-A. Durata della prova: 2 ore **11.1.16**

Firma: ....

Cognome .... **Nome** ....

Matricola .... **Corso di Laurea** ....

D1	
D2	
E1	
E2	
E3	
E4	
E5	
Σ	

Domanda 1

[4 punti]

(i) Dare la definizione di $\lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty$.

(ii) Dare un esempio di una successione a_n tale che $\lim_{n\to+\infty} a_n = 7$.

Risposta

(i) $\forall M < 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tale che

$a_n < M \quad \forall n \geq n_0$

(ii) $a_n = 7 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Domanda 2

[4 punti]

(i) Dare la definizione di derivata prima in x_0 per $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

(ii) Disegnare il grafico di una funzione $f: [1,5] \to \mathbb{R}$ con $f'(2) = -1$ e $f'(4) = 0$.

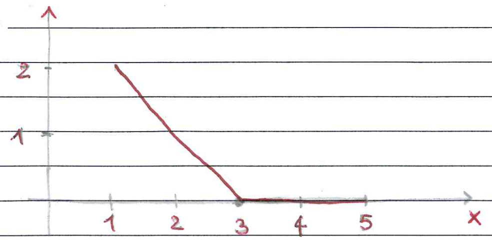
Risposta

(i) f è derivabile in x_0 se il limite

$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ esiste ed è finito.

(ii)

$$f(x) = \begin{cases} 3 - x & x \in [1,3] \\ 0 & x \in (3,5] \end{cases}$$



Esercizio 1 **[5 punti]**

Studiare il carattere della serie

$$\underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1+\frac{12+n^4}{153+n+n^5}\right)}_{a_n} \qquad \text{DIVERGE}$$

Risoluzione

$a_n = \ln\left(1+\dfrac{12+n^4}{153+n+n^5}\right)$ è a termini positivi

Per $n \to +\infty$ $\quad \dfrac{12+n^4}{153+n+n^5} \sim \dfrac{n^4}{n^5} = \dfrac{1}{n} \longrightarrow 0$

Dunque $a_n \to 0$ per $n \to +\infty$ e vale

$a_n \sim \dfrac{12+n^4}{153+n+n^5} \sim \dfrac{1}{n}$ termine di serie divergente

Per il criterio del confronto asintotico, la serie di termine a_n è divergente.

Esercizio 2 **[4 punti]**

Studiare la convergenza o la divergenza del seguente integrale improprio. Nel caso converga, calcolarne il valore.

$$I = \int_9^{+\infty} \frac{1}{(x-8)^{12}}\, dx.$$

Risoluzione

$I \overset{\text{def}}{=} \lim\limits_{M\to+\infty} \displaystyle\int_9^M \frac{1}{(x-8)^{12}}\,dx$ (se tale limite esiste).

$$\int_9^M \frac{1}{(x-8)^{12}}\,dx = \frac{1}{-12+1}(x-8)^{-12+1}\Big|_9^M =$$

$$= -\frac{1}{11}\Big[\underbrace{\frac{1}{(M-8)^{11}}}_{\to\, 0 \text{ per } M\to+\infty} - 1\Big] \xrightarrow{M\to+\infty} \frac{1}{11}$$

$\Rightarrow I = 1/11$

Esercizio 3 **[5 punti]**

Trovare il piano tangente in $(3,1)$ alla funzione $f(x,y) = 5 + xy^4 + \cos(xy\frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{2})$.

Risoluzione

Equazione del piano tangente:

$$p(x,y) = f(3,1) + f_x(3,1)(x-3) + f_y(3,1)(y-1)$$

$f(3,1) = 5 + 3 + \cos\left(\frac{3}{2}\pi - \frac{3}{2}\pi\right) = 9$

$f_x(x,y) = y^4 - \operatorname{sen}\left(xy\frac{\pi}{2} - \frac{3}{2}\pi\right)\cdot y\frac{\pi}{2} \Rightarrow f_x(3,1) = 1$

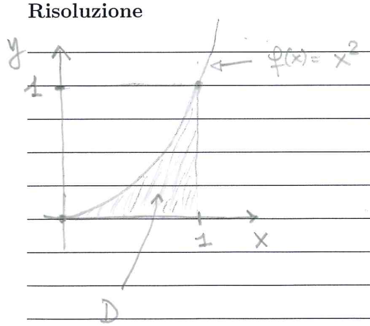
$f_y(x,y) = 4xy^3 - \operatorname{sen}(\dots)\cdot x\frac{\pi}{2} \Rightarrow f_y(3,1) = 12$

$\Rightarrow p(x,y) = 9 + x - 3 + 12y - 12 = x + 12y - 6$

Esercizio 4 **[5 punti]**

Disegnare l'insieme $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le x^2\}$. Calcolare l'integrale $\iint_D (3x+5y)\,dxdy$. $I=$

Risoluzione



Per Fubini-Tonelli

$$I = \int_0^1 \left[\int_0^{x^2} (3x+5y)\,dy\right] dx =$$

$$= \int_0^1 \left[3xy + \frac{5}{2}y^2\right]_0^{x^2} dx =$$

$$= \int_0^1 3x\cdot x^2 + \frac{5}{2}(x^2)^2\,dx = \int_0^1 \left(3x^3 + \frac{5}{2}x^4\right)dx =$$

$$= \left[\frac{3}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^5\right]_0^1 = \frac{3}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3+2}{4} = \frac{5}{4}$$