Analisi Matematica 1, Scritto 1-B. Durata della prova: 2 ore **11.1.16**

Firma: ....

Cognome .... **Nome** ....

Matricola .... **Corso di Laurea** ....

D1	
D2	
E1	
E2	
E3	
E4	
E5	
Σ	

Domanda 1

[4 punti]

(i) Dare la definizione di $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$.

(ii) Dare un esempio di una successione a_n tale che $\lim_{n\to+\infty} a_n = -3$.

Risposta

(i) $\forall M > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N}$ t.c.

$a_n > M \quad \forall n \geq n_0$

(ii) $a_n = \dfrac{-3n}{n+1}, \ n \in \mathbb{N}$

Domanda 2

[4 punti]

(i) Dare la definizione di derivata prima in x_0 per $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

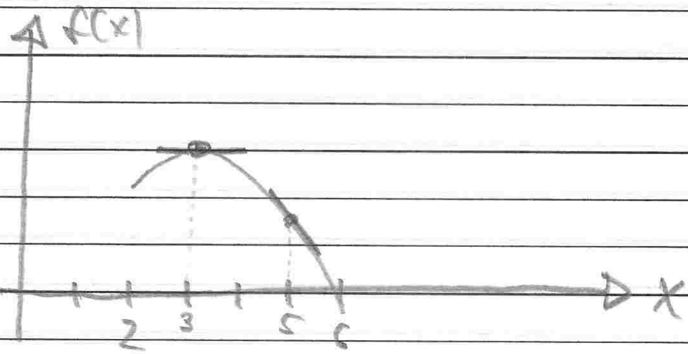
(ii) Disegnare il grafico di una funzione $f : [2, 6] \to \mathbb{R}$ con $f'(3) = 0$ e $f'(5) = -1$.

Risposta

(i)

cfr. capitolo A

(ii)



Esercizio 1

[5 punti]

Studiare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \sin\left(\frac{17+n^6}{161+n^2+n^7}\right) =: S$$

Risoluzione

- $\frac{17+n^6}{161+n^2+n^7} \sim \frac{n^6}{n^7} = \frac{1}{n} \to 0$ per $n \to +\infty$

- $\sin(x) \sim x$ per $x \to 0$ $\Rightarrow$

  $\sin\left(\frac{17+n^6}{161+n^2+n^7}\right) \sim \sin\left(\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}$ per $n \to +\infty$

- visto che $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ diverge a $+\infty$, per il crit. del confronto asintotico diverge anche S

Esercizio 2

[4 punti]

Studiare la convergenza o la divergenza del seguente integrale improprio. Nel caso converga, calcolarne il valore.

$$I := \int_7^{+\infty} \frac{1}{(x-6)^{18}}\, dx.$$

Risoluzione

$$I = \lim_{c \to +\infty} \int_7^c \frac{1}{(x-6)^{18}}\, dx = \lim_{c \to +\infty} \left[\frac{1}{-17} \cdot (x-6)^{-17}\right]_7^c$$

$$= \frac{1}{17}$$

Esercizio 3

[5 punti]

Trovare il piano tangente in $(1,3)$ alla funzione $f(x,y) = 6 + x^4 y + \cos(xy\frac{\pi}{4} - \frac{3\pi}{4})$.

Risoluzione

- $P(x,y) = f(1,3) + f_x(1,3)\cdot(x-1) + f_y(1,3)\cdot(y-3)$
- $f(1,3) = 10$
- $f_x(x,y) = 4x^3\cdot y - \sin(xy\cdot\frac{\pi}{4} - \frac{3\pi}{4})\cdot y\pi/4 \Rightarrow f_x(1,3) = 12$
- $f_y(x,y) = x^4 - \sin(xy\cdot\pi/4 - 3\pi/4)\cdot x\cdot\pi/4 \Rightarrow f_y(1,3) = 1$

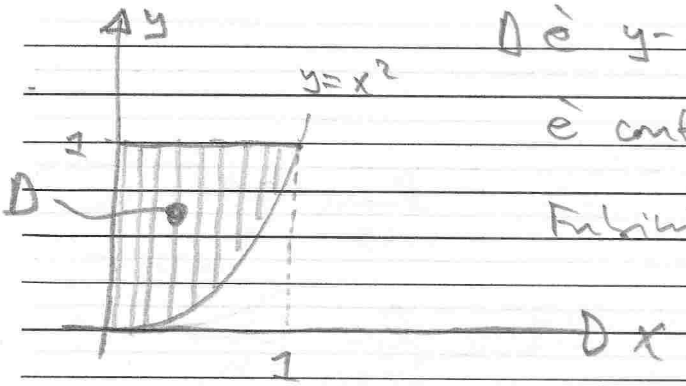
Quindi $P(x,y) = 10 + 12(x-1) + (y-3)$

Esercizio 4

[5 punti]

Disegnare l'insieme $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 1,\ x^2 \le y \le 1\}$. Calcolare l'integrale $\iint_D (2x+4y)\,dxdy$. $=: I$

Risoluzione



D è y-semplice e $f(x,y) = 2x+4y$ è continua. Quindi per Fubini-Tonelli segue

$$I = \int_0^1 \int_{x^2}^1 (2x+4y)\,dy\,dx = \int_0^1 \left[2xy + 2y^2\right]_{y=x^2}^{y=1} dx$$

$$= \int_0^1 (2x + 2 - 2x^3 - 2x^4)\,dx$$

$$= \left[x^2 + 2x - \frac{1}{2}x^4 - \frac{2}{5}x^5\right]_0^1 = 1 + 2 - \frac{1}{2} - \frac{2}{5} - 0$$

$$= \frac{10+20-5-4}{10} = \frac{21}{10}$$

Esercizio 5

[5 punti]

Studiare la continuità, la derivabilità e la differenziabilità in $(x_0, y_0) = (0,0)$ della funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{3x^2 \ln(1+y^2)}{x^4+y^4} + 4x & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Risoluzione

• Continuità: poniamo $y = mx \Rightarrow$

$$\lim_{x\to 0} f(x, mx) = \lim_{x\to 0} \left(\frac{3x^2 \cdot \ln(1+m^2 \cdot x^2)}{x^4 + m^4 \cdot x^4} + \underbrace{4x}_{\to 0 \text{ per } x\to 0} \right)$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{3x^2 \cdot m^2 \cdot x^2}{x^4(1+m^4)} = \frac{3m^2}{1+m^4}$$

$\ln(1+t) \sim t,\ t\to 0$
$\Rightarrow \ln(1+m^2 \cdot x^2) \sim m^2 \cdot x^2$ per $x \to 0$

dipende da m

$\Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ non esiste $\Rightarrow f$ non continua in $(0,0)$

$\Rightarrow f$ non differenziabile in $(0,0)$

• derivabilità:

$$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{4h}{h} = 4$$

$$f_y(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0$$

$\neq 0$

Quindi f è derivabile in $(0,0)$ con $\text{grad } f(0,0) = (4, 0)$.