Analisi Matematica (1). Durata della prova: 2 ore 11.06.2019

Firma:..............................

Cognome............................Nome....................................A.A..........

Matricola.....................................Corso di Laurea ....

D1	
D2	
E1	
E2	
E3	
E4	
E5	
Σ	

Domanda 1

[4 punti]

(i) Dare la definizione di $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$.

(ii) Dare un esempio di una successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tale che $\lim_{n\to+\infty} a_n = -3$.

Risposta

(i) $\forall M>0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tale che $a_n > M\ \forall n \geq n_0$

(ii)

p.e. $\left(\frac{1}{n+1} - 3\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $\ell = -3$

Domanda 2

[4 punti]

(i) Enunciare il teorema di Lagrange (chiamato anche teorema della media).

(ii) Trovare un punto c del teorema di Lagrange per $f(x) = 5x^2 + 3x + 6$ nell'intervallo $[1, 3]$.

Risposta

(i) Se $f \in C[a,b]$ è derivabile in (a,b), allora

esiste $c \in (a,b)$ t.c. $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

(ii) • $f \in C[1,3]$ è derivabile in $(1,3)$ con $f'(x) = 10x+3$

• $f(1) = 5+3+6 = 14$. $f(3) = 5\cdot 9 + 3\cdot 3 + 6 = 60$

$\Rightarrow \frac{f(3)-f(1)}{3-1} = \frac{60-14}{2}\ 23 \overset{!}{=} f'(c) = 10c+3$

Cioè $10c+3 = 23 \Rightarrow c = \frac{23-3}{10} = 2$

Esercizio 1 **[5 punti]**

Studiare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{19+n+n^5}{174+n+n^6} =: a_n$$

Risoluzione

- $a_n \sim \frac{n^5}{n^6} = \frac{1}{n}$ per $n \to +\infty$
- $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ diverge a $+\infty$

$\Rightarrow$ (per il criterio asintotico del confronto) anche

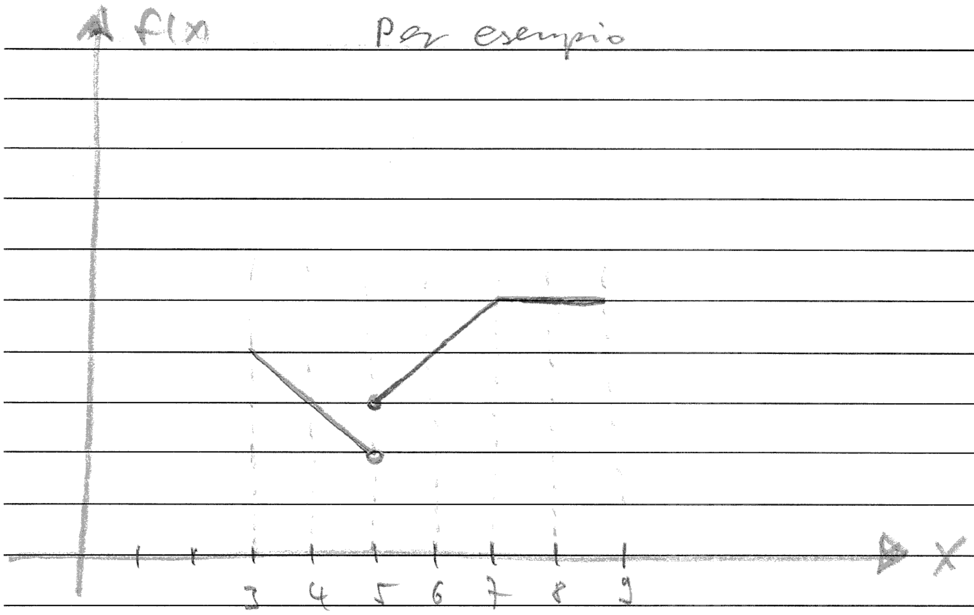
$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = +\infty$$

Esercizio 2 **[5 punti]**

Disegnare il grafico di una funzione $f : [3, 9] \to \mathbb{R}$ con $f'(4) = -1$, non continua in $x = 5$, con $f'(6) = 1$, con un punto angoloso in $x = 7$ e con $f'(8) = 0$.

Risoluzione

Per esempio



Esercizio 3

[5 punti]

Trovare il piano tangente in $(1,2)$ relativo alla funzione $f(x,y) = 4 + x^3y^2$.

Risoluzione

- $p(x,y) = f(1,2) + f_x(1,2)\cdot(x-1) + f_y(1,2)\cdot(y-2)$
- $f(1,2) = 4+4=8$
- $f_x(x,y) = 3x^2\cdot y^2 \Rightarrow f_x(1,2) = 3\cdot 2^2 = 12$
- $f_y(x,y) = x^3\cdot 2y \Rightarrow f_y(1,2) = 2\cdot 2 = 4$

Quindi $p(x,y) = 8 + 12\cdot(x-1) + 4\cdot(y-2)$

Esercizio 4

[4 punti]

Studiare il limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^4 \cdot \ln(1+x^8)}{x^{12}+y^{12}} =: \ell$$

Risoluzione

Poniamo $y = m\cdot x$. Allora il limite diventa

$$\lim_{x\to 0} \frac{m^4\cdot \cancel{x^4}\cdot \ln(1+x^8)}{x^{\cancel{12}\,8} + m^{12}\cdot x^{\cancel{12}\,8}} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{m^4}{(1+m^{12})}\cdot \underbrace{\frac{\ln(1+x^8)}{x^8}}_{\to 1}\right)$$

$$= \frac{m^4}{1+m^{12}} \quad \text{dipende da } m\in\mathbb{R}$$

$\Rightarrow \ell$ non esiste.

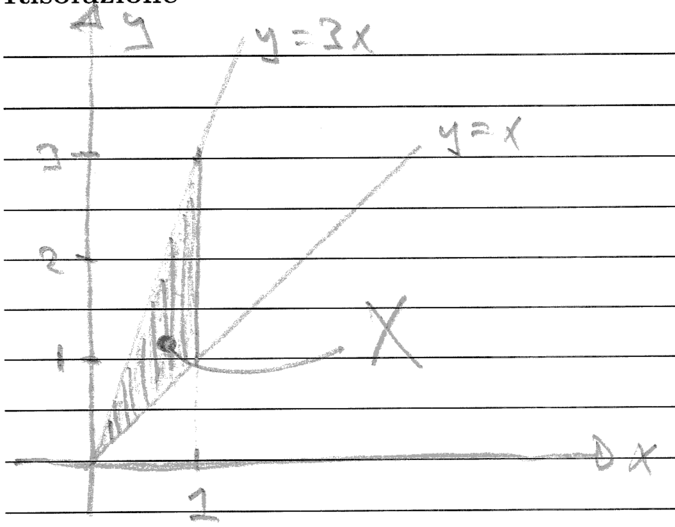
Esercizio 5

[5 punti]

Disegnare l'insieme $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 1,\ x \le y \le 3x\}$. Calcolare l'integrale

$$I := \iint_X \underbrace{5x^2y}_{=:\, f(x,y)} \, dx\, dy$$

Risoluzione



• $f : X \to \mathbb{R}$ è continua e X è y-semplice

$\Rightarrow$ (per il teorema di Fubini-Tonelli)

$$I = \int_0^1 \left(\int_x^{3x} 5x^2 \cdot y \, dy \right) dx$$

$$= \int_0^1 5x^2 \cdot \left[\frac{y^2}{2} \right]_x^{3x} dx = \frac{5}{2} \cdot \int_0^1 x^2 (9x^2 - x^2)\, dx$$

$$= \frac{5}{2} \cdot \int_0^1 8x^4 \, dx = \frac{\cancel{5}}{\cancel{2}} \cdot \overset{4}{\cancel{8}} \cdot \frac{x^5}{\cancel{5}} \Big|_0^1$$

$$= 4(1^5 - 0^5) = 4$$