Analisi Matematica (1) $\boxed{9\,\text{CFU}}$ Durata della prova: 2 ore 11.7.16

Firma:..............................

Cognome............................ Nome.................................. A.A..........

Matricola.................................. Corso di Laurea..............................

D1	
D2	
E1	
E2	
E3	
E4	
E5	
Σ	

Domanda 1

[4 punti]

(i) Dare la definizione di $\lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty$.

(ii) Scrivere una successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ per cui valga $\lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty$.

Risposta

(i) cfr. appunti

(ii) p.e. $a_n = -n \to -\infty$ per $n \to +\infty$

Domanda 2

[4 punti]

(i) Enunciare il teorema di Lagrange (chiamato anche teorema del valor medio).

(ii) Trovare un punto c del teorema di Lagrange per $f(x) = x^2 - x + 1$ in $[2, 4]$.

Risposta

(i) cfr. appunti

(ii) $f(a) = f(2) = 2^2 - 2 + 1 = 3$, $f(b) = f(4) = 4^2 - 4 + 1 = 13$

$\Rightarrow \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = \dfrac{13-3}{4-2} = 5 \overset{!}{=} f'(c) = 2c - 1$

$\Rightarrow c = 3$

Esercizio 1

[5 punti]

Studiare il carattere della serie

$$S := \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k!+17}{(k+1)!}$$

Risoluzione

- $k!+17 \sim k! \Rightarrow \frac{k!+17}{(k+1)!} \sim \frac{k!}{(k+1)\cdot k!} = \frac{1}{k+1} \sim \frac{1}{k}$

per $k \to +\infty$

- $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k}$ diverge a $+\infty$

$\Rightarrow S$ diverge a $+\infty$

criterio del confronto (asintotico)

Esercizio 2

[4 punti]

Calcolare il limite

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n \cdot \sin\left(\frac{3+n}{7+n^5}\right)}{1-\cos\left(\frac{1}{n}\right)} =: \ell = 0$$

Risoluzione

- $\sin(x) \sim x$ per $x \to 0$
- $\frac{3+n}{7+n^5} \sim \frac{n}{n^5} = \frac{1}{n^4} \to 0$ per $n \to +\infty$

$\Rightarrow n \cdot \sin\left(\frac{3+n}{7+n^5}\right) \sim n \cdot \frac{1}{n^4} = \frac{1}{n^3}$ per $n \to +\infty$

- $1-\cos(x) \sim \frac{x^2}{2}$ per $x \to 0$
- $\frac{1}{n} \to 0$ per $n \to +\infty$

$\Rightarrow 1-\cos\left(\frac{1}{n}\right) \sim \frac{(1/n)^2}{2} = \frac{1}{2n^2}$ per $n \to +\infty$

$\Rightarrow \frac{n \cdot \sin\left(\frac{3+n}{7+n^5}\right)}{1-\cos(1/n)} \sim \frac{1/n^3}{1/2n^2} = \frac{2}{n} \to 0 = \ell$

per $n \to +\infty$

Esercizio 3

[5 punti]

Calcolare la derivata direzionale $\frac{\partial f}{\partial v}(1,2)$ dove $f(x,y) = \sqrt{4 + x^6 + y^2}$ e $v = (\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$.

Risoluzione

- $\frac{\partial f}{\partial v}(1,2) = f_x(1,2) \cdot \frac{3}{5} + f_y(1,2) \cdot \frac{4}{5}$

- $f_x(x,y) = \frac{1}{\cancel{2}}(4+x^6+y^2)^{-1/2} \cdot \overset{3}{\cancel{6}}x^5 \Rightarrow f_x(1,2) = (4+1+4)^{-1/2} \cdot 3 = 1$

- $f_y(x,y) = \frac{1}{\cancel{2}}(4+x^6+y^2)^{-1/2} \cdot \cancel{2}y \Rightarrow f_y(1,2) = (9)^{-1/2} \cdot 2 = \frac{2}{3}$

$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial v}(1,2) = 1 \cdot \frac{3}{5} + \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{9+8}{15} = \frac{17}{15}$

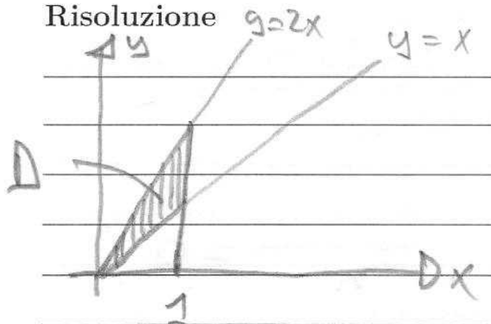
Esercizio 4

[5 punti]

Disegnare l'insieme $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; 0 \le x \le 1, \; x \le y \le 2x\}$. Calcolare l'integrale

$$I := \iint_D (x - y) \, dx dy$$

Risoluzione



D è y-semplice $\Rightarrow$

$$I = \int_0^1 \int_x^{2x} (x-y) \, dy \, dx = \int_0^1 \left(xy - \frac{y^2}{2}\right)\Big|_{y=x}^{y=2x} dx$$

$$= \int_0^1 \left(\cancel{x \cdot 2x} - \cancel{\frac{4x^2}{2}} - x^2 + \frac{x^2}{2}\right) dx = -\int_0^1 \frac{x^2}{2} dx$$

$$= -\frac{x^3}{6}\Big|_0^1 = -\frac{1}{6}$$

Esercizio 5

[5 punti]

Studiare la continuità, la derivabilità e la differenziabilità in $(x_0, y_0) = (0,0)$ della funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{y^2 \ln(1+x^2)}{x^4+y^4} + 2x & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Risoluzione

• poniamo $y = mx \Rightarrow$

$$\frac{y^2 \ln(1+x^2)}{x^4+y^4} = \frac{m^2 \cdot x^2 \cdot \ln(1+x^2)}{x^4+m^4 \cdot y^4} \sim \frac{m^2 \cdot x^2 \cdot x^2}{x^4(1+m^4)} = \frac{m^2}{1+m^4}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x, mx) = \frac{m^2}{1+m^4} + 0 = \frac{m^2}{1+m^4}$$: dipende da m

$\Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ non esiste

$\Rightarrow$ f non è continua in $(0,0)$

$\Rightarrow$ f non è differenziabile in $(0,0)$

• derivabilità:

$$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0 + 2h - 0}{h} = 2$$

$$f_y(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0+0-0}{h} = 0$$

Quindi f è derivabile parzialmente in $(0,0)$

con $\text{grad} f(0,0) = (2,0)$