Analisi Matematica 1. Durata della prova: 2 ore 12.9.16

Firma: ....

Cognome .... Nome .... A.A. ....

Matricola .... Corso di Laurea ....

D1	
D2	
E1	
E2	
E3	
E4	
E5	
Σ	

Domanda 1

[4 punti]

(i) Dare la definizione di funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua in $x = c$.

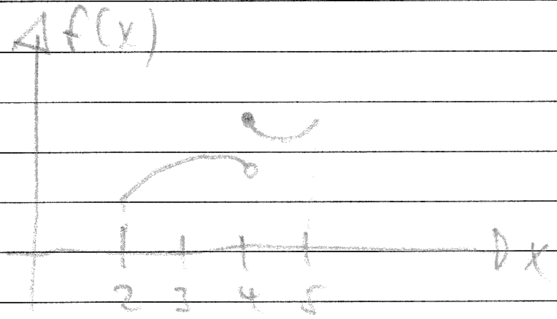
(ii) Disegnare il grafico di una funzione $f : [2, 5] \to \mathbb{R}$ continua in $x = 3$ e non continua in $x = 4$.

Risposta

(i)

cfr. appunti

(ii)



Domanda 2

[4 punti]

(i) Enunciare il teorema degli zeri.

(ii) Verificare che la funzione $f(x) = 7 - x^2 - x^3$ ammette uno zero nell'intervallo $[1, 2]$.

Risposta

(i)

cfr. appunti

(ii)

- f è un polinomio, quindi continua
- $f(1) = 7 - 1^2 - 1^3 = +5 > 0$
- $f(2) = 7 - 2^2 - 2^3 = -5 < 0$

teor. degli zeri

$\Rightarrow \exists\, c \in [1,2]$ con $f(c) = 0$.

Esercizio 1

[5 punti]

Studiare il carattere della serie

$$S := \sum_{k=1}^{+\infty} \overbrace{\frac{k! + 23}{(k+1)!}}^{=: a_k}$$

Risoluzione

Si usa il criterio del confronto asintotico:

- $0 < a_k \sim \frac{k!}{(k+1)!} = \frac{k!}{k!(k+1)} = \frac{1}{k+1} \sim \frac{1}{k}$

per $k \to +\infty$

- La serie $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k}$ diverge a $+\infty$

$\Rightarrow$ La serie S diverge a $+\infty$.

Esercizio 2

[4 punti]

Calcolare, se esiste, il seguente limite

$$\lim_{n\to+\infty} \overbrace{\left(\frac{7}{16 + 3 \cdot (-1)^n}\right)^n}^{=: b_n}$$

Risoluzione

Si usa il teorema dei C.C.:

$$(-1)^n = \begin{cases} +1 & \text{se } n \text{ è pari} \\ -1 & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{7}{16+3}\right)^n \leq b_n \leq \left(\frac{7}{16-3}\right)^n$$

$$\left(\frac{7}{19}\right)^n \to 0 \qquad \frac{7}{19} = q_1 < 1$$

$$\left(\frac{7}{13}\right)^n \to 0 \text{ per } n \to +\infty \qquad \frac{7}{13} = q_2 < 1$$

C.C.

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} b_n = 0.$$

Esercizio 3

[5 punti]

Trovare il piano tangente in $(2,1)$ alla funzione $f(x,y) = 7 + \sqrt{12 + x^2 y^6}$.

Risoluzione

- $p(x,y) = f(2,1) + f_x(2,1)\cdot(x-2) + f_y(2,1)\cdot(y-1)$
- $f(2,1) = 7 + \sqrt{12 + 2^2 \cdot 1^6} = 7 + \sqrt{16} = 11$
- $f_x(x,y) = \frac{1}{2}(12 + x^2 \cdot y^6)^{-1/2} \cdot 2xy^6 \Rightarrow f_x(2,1) = \frac{2\cdot 2}{2\cdot 4} = \frac{1}{2}$
- $f_y(x,y) = \frac{1}{2}(12 + x^2 \cdot y^6)^{-1/2} \cdot 6x^2 \cdot y^5 \Rightarrow f_y(2,1) = \frac{6\cdot 2^2}{2\cdot \cancel{4}} = 3$

$\Rightarrow p(x,y) = 11 + \frac{1}{2}(x-2) + 3(y-1)$

Esercizio 4

[5 punti]

Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^2 \cdot \sin(x^2)}{x^4 + y^4} \ .$$

Risoluzione

Poniamo $y = mx \Rightarrow$

$$\frac{y^2 \cdot \sin x^2}{x^4 + y^4} = \frac{m^2 x^2 \cdot \underbrace{\sin x^2}_{\sim x^2}}{x^4 + m^4 \cdot x^4} \sim \frac{m^2 \cdot \cancel{x^4}}{(1+m^4)\cdot \cancel{x^4}} = \frac{m^2}{1+m^4}$$

dipende da $m \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ il limite <u>non</u> esiste

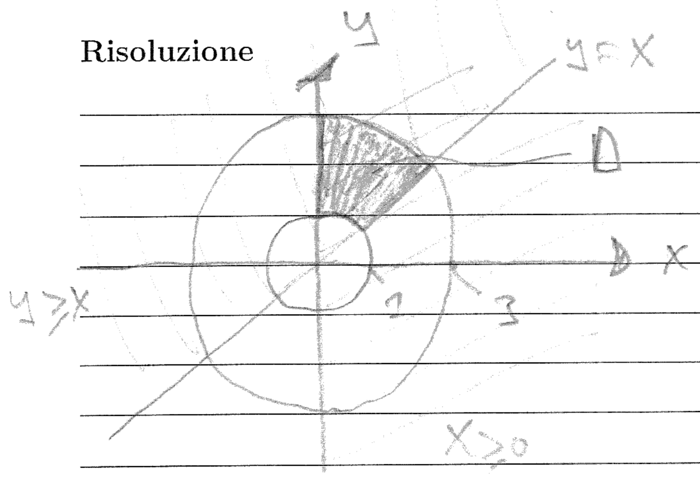
Esercizio 5

[5 punti]

Disegnare l'insieme $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 9,\ x \geq 0,\ y \geq x\}$. Calcolare l'integrale

$$I := \iint_D \frac{x + y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\, dx dy\ .$$

Risoluzione



Si passa alle coordinate polari:

D corrisponde a $D' = [1, 3] \times [\pi/4, \pi/2]$

in coord. polari. Quindi segue

$$I = \int_1^3 \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\cancel{\rho} \cdot \cos\vartheta + \rho \cdot \sin\vartheta}{\cancel{\rho}} \cdot \rho \, d\vartheta \, d\rho$$

$$= \int_1^3 \rho \, d\rho \cdot \int_{\pi/4}^{\pi/2} \cos\vartheta + \sin\vartheta \, d\vartheta$$

$$= \frac{\rho^2}{2}\Big|_1^3 \cdot \Big[\sin\vartheta - \cos\vartheta\Big]_{\pi/4}^{\pi/2}$$

$$= \frac{9-1}{2} \cdot \left[1 - 0 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right]$$

$$= 4$$