Analisi Matematica 1, Scritto 1-A. Durata della prova: 2 ore 12.7.18

Firma: ....

Cognome .... **Nome** .... **A.A.** ....

Matricola .... **Corso di Laurea** ....

Domanda 1 [4 punti]

D1	
D2	
E1	
E2	
E3	
E4	
E5	
Σ	

(i) Dare la definizione di successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ infinitesima.

(ii) Usando la definizione di limite, dimostrare che la successione $a_n = \frac{1}{n}$ è infinitesima.

Risposta

(i) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si dice infinitesima se $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$,

cioè se $\forall \varepsilon>0\ \exists n_0\in\mathbb{N}$ t.c. $|a_n|<\varepsilon\ \forall n\geq n_0$.

(ii) Sia $\varepsilon>0$. Allora $|a_n| = \frac{1}{n} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon}$. Quindi se si sceglie $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$, allora segue $|a_n| = \frac{1}{n} < \frac{1}{n_0}\ \forall n \geq n_0$

$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0.$

Domanda 2 [4 punti]

(i) Dare la definizione di punto di minimo locale per una funzione $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

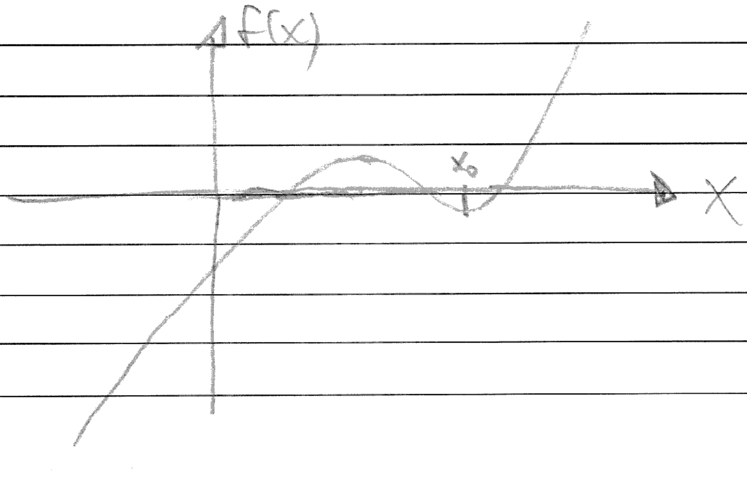
(ii) Fare un esempio grafico di funzione non limitata inferiormente che possiede un punto di minimo locale.

Risposta

(i) $x_0\in\mathbb{R}$ si dice pto. di min. locale di f se $\exists\ \delta>0$ t.c.

$f(x_0) \leq f(x)\ \forall\ x\in(x_0-\delta, x_0+\delta)$.

(ii) P.e.



Esercizio 1

[5 punti]

Studiare il carattere della serie

$$S := \sum_{n=1}^{+\infty} n \cdot \left(e^{\frac{1}{n^2}} - 1\right)$$

Risoluzione

- Visto che $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ vale $e^x - 1 \sim x$ per $x \to 0$
- $x = \frac{1}{n^2} \to 0$ per $n \to +\infty \Rightarrow e^{\frac{1}{n^2}} - 1 \sim \frac{1}{n^2}$ per $n \to +\infty$

P.d.S. $\Rightarrow n \cdot \left(e^{\frac{1}{n^2}} - 1\right) \sim n \cdot \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n}$ per $n \to +\infty$

- $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ diverge a $+\infty$ quindi per il criterio del confronto asintotico anche la serie S diverge a $+\infty$.

Esercizio 2

[5 punti]

Calcolare, se esiste, il limite

$$l = \lim_{x \to 0} \frac{\sin \sqrt[3]{3x} + \ln(1+x) - \sqrt[3]{3x}}{x}$$

Risoluzione

- Facciamo la sostituzione $\sqrt[3]{3x} = t$, cioè $3x = t^3 \Leftrightarrow x = t^3/3$. Allora $x \to 0 \Leftrightarrow t \to 0$.
- $l = \lim_{t \to 0} \frac{\sin(t) + \ln(1 + t^3/3) - t}{t^3/3}$

$= \lim_{t \to 0} 3 \cdot \frac{\sin(t) - t}{t^3} + \lim_{t \to 0} \frac{\ln(1 + t^3/3)}{t^3/3}$ $=h \to 0$, $=h$

$\overset{(H)}{=} 3 \cdot \frac{\cos(t) - 1}{3 \cdot t^2} + 1 = -\frac{1}{2} + 1 = \underline{\underline{1/2}}$

Esercizio 3

[4 punti]

Trovare il piano tangente in $(x_0, y_0) = (1, 2)$ alla funzione $f(x, y) = \cos(x - y^2)$.

Risoluzione

- $p(x,y) = f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)\cdot(y-y_0)$
- $f(x_0,y_0) = f(1,2) = \cos(1-2^2) = \cos(-3) = \cos(3)$
- $f_x(x,y) = -\sin(x-y^2)\cdot 1 \Rightarrow f_x(x_0,y_0) = f_x(1,2) = -\sin(-3) = \sin(3)$
- $f_y(x,y) = -\sin(x-y^2)\cdot(-2y) \Rightarrow f_y(x_0,y_0) = f_y(1,2) = \sin(-3)\cdot 4 = -4\cdot\sin(3)$

Quindi $p(x,y) = \cos(3) + \sin(3)(x-1) - 4\sin(3)(y-2)$

Esercizio 4

[5 punti]

Studiare la continuità, la derivabilità e la differenziabilità in $(0, 0)$ della funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin(xy^3)}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{se } (x,y) \neq 0 \\ 0 & \text{se } (x,y) = 0 \end{cases}$$

Risoluzione

- $f(x,0) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f_x(0,0) = 0$
- $f(0,y) = 0 \quad \forall y \in \mathbb{R} \Rightarrow f_y(0,0) = 0$

$\Rightarrow$ f è derivabile parzialmente in $(0,0)$ con $\nabla f(0,0) = (0,0)$

- $\left| \frac{f(x,y) - \overbrace{f(0,0) - f_x(0,0)\cdot x - f_y(0,0)\cdot y}^{=0}}{\|(x,y)-(0,0)\|} \right| = \left| \frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} \right| = \left| \frac{\sin(x\cdot y^3)}{x^2+y^2} \right|$

per $x,y \to 0$: $\sim \left| \frac{x\cdot y^3}{x^2+y^2} \right| \overset{\text{in coord. polari}}{=} \left| \frac{\rho\cdot\cos\vartheta\cdot\rho^3\cdot\sin^3\vartheta}{\rho^2} \right| \leq \rho^2 \to 0$ per $\rho \to 0$

$\Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - f_x(0,0)\cdot x - f_y(0,0)\cdot y}{\|(x,y)-(0,0)\|} = 0 \Rightarrow$

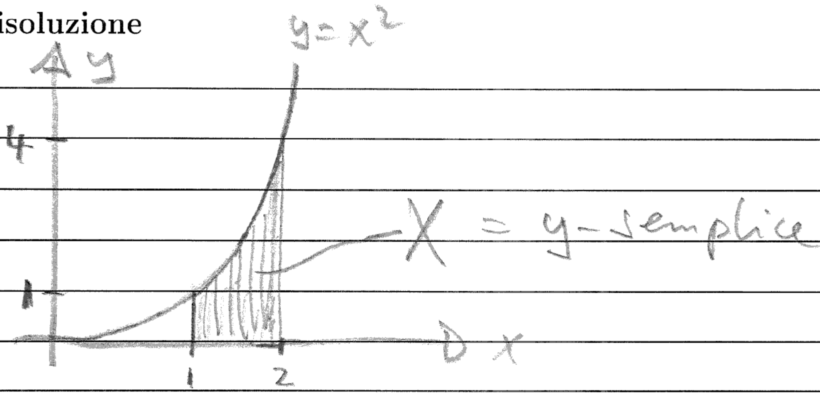
f è differenziabile in $(0,0)$ $\Rightarrow$ f è continua in $(0,0)$

Esercizio 5 **[5 punti]**

Disegnare l'insieme $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \le x \le 2,\ 0 \le y \le x^2\}$ e calcolare l'integrale doppio

$$I := \iint_X e^{y/x}\, dx\, dy.$$

Risoluzione



Per il teorema di Fubini-Tonelli vale

$$I = \int_{x=1}^{2} \int_{y=0}^{x^2} e^{y/x}\, dy\, dx$$

$$= \int_{x=1}^{2} \left[x \cdot e^{y/x} \right]_{y=0}^{x^2} dx$$

$$= \int_1^2 x \cdot \left(e^{x^2/x} - e^0 \right) dx$$

$$= \int_1^2 x \cdot e^x - x\, dx = \int_1^2 \underset{u\ \cdot\ v'}{x \cdot e^x}\, dx - \left[\frac{x^2}{2} \right]_1^2$$

$$\overset{\text{i.p.p.}}{=} \underset{u\ \cdot\ v}{x \cdot e^x}\Big|_1^2 - \int_1^2 \underset{u'}{1} \cdot e^x\, dx - \left(\frac{4}{2} - \frac{1}{2} \right)$$

$$= 2 \cdot e^2 - 1 \cdot e^1 - e^x\Big|_1^2 - \frac{3}{2}$$

$$= 2e^2 \cancel{- e} - e^2 \cancel{+ e^1} - \frac{3}{2}$$

$$= \underline{\underline{e^2 - \frac{3}{2}}}$$