Domanda 1

[4 punti] 12.2.21

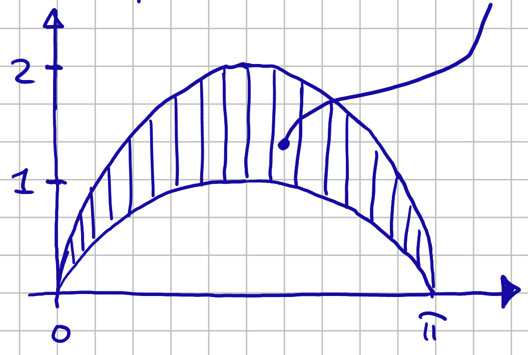
(i) Dare la definizione di un dominio y-semplice $X \subset \mathbb{R}^2$.

(ii) Dare un esempio (anche grafico) di un dominio y-semplice che *non* è x-semplice.

Sol: i) $X \subseteq \mathbb{R}^2$ si dice dominio y-semplice se esistono funzioni $g_1, g_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue t.c.

$$X = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [a,b],\ g_1(x) \le y \le g_2(x) \}$$

ii) Per esempio il dominio $X = \{ (x,y) \mid x \in [0,\pi],\ \sin(x) \le y \le 2 \sin(x) \}$ è y-semplice ma non x-semplice



Domanda 2

[4 punti]

(i) Enunciare il teorema di Rolle.

(ii) Verificare che la funzione $f : [-2, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^4 + x^3 + 2x$ ammette almeno un punto critico.

Sol: i) Se $f \in C[a,b]$ è derivabile in (a,b) e $f(a) = f(b)$ allora esiste $c \in (a,b)$ t.c. $f'(c) = 0$.

ii) f è derivabile su $\mathbb{R}$, in particolare continua in $[-2,1]$ e derivabile in $(-2,1)$. Inoltre

- $f(-2) = (-2)^4 + (-2)^3 + 2(-2) = 16 - 8 - 4 = 4$
- $f(1) = 1^4 + 1^3 + 2 \cdot 1 = 4 = f(-2)$

$\Rightarrow$ (per il teorema di Rolle) esiste $c \in (-2,1)$ con $f'(c) = 0$, cioè c è un punto critico di f.

Esercizio 1

[5 punti]

Calcolare, se esiste, il limite della successione

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}} =: a_n$$

Sol: Si usa il fatto che per una successione a termini positivi vale

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \ell.$$

Per $a_n = \frac{n!}{n^n}$ segue:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\overbrace{(n+1)!}^{=(n+1)\cdot n!}}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}$$

$$= \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \to \frac{1}{e} =: \ell \quad \text{per } n\to+\infty$$

$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to e$

Quindi risulta che anche $\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}} = \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} \to \frac{1}{e}$ per $n\to+\infty$

Esercizio 2 [5 punti]

Calcolare il polinomio di Maclaurin di ordine 4 della funzione $f(x) = (1+x)^x$.

Sol: • $f(x) = (1+x)^x = \left(e^{\ln(1+x)}\right)^x = e^{x\cdot\ln(1+x)}$

• $e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + o(t^2)$ per $t\to0$

• $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$ per $x\to0$ $\Rightarrow$

$x\cdot\ln(1+x) = x^2 - \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{3} + o(x^4)$

$= x^2 + o(x^2) \sim x^2$ per $x\to0$

• Ponendo $t = x\cdot\ln(1+x)$ segue

$$e^{x\cdot\ln(1+x)} = 1 + x\cdot\ln(1+x) + \frac{(x\cdot\ln(1+x))^2}{2} + \overbrace{o\Big(\underbrace{(x\cdot\ln(1+x))}_{\sim x^2}{}^2\Big)}^{=o((x^2)^2)=o(x^4)}$$

$$= 1 + \left(x^2 - \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{3} + o(x^4)\right) + \frac{(x^2+o(x^2))^2}{2} + o(x^4)$$

$$= 1 + x^2 - \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{3} + \frac{x^4}{2} + \underbrace{\overbrace{2x^2\cdot o(x^2)}^{=o(x^4)} + \overbrace{(o(x^2))^2}^{=o(x^4)} + o(x^4)}_{=o(x^4)}$$

$$= 1 + x^2 - \frac{x^3}{2} + \left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right)\cdot x^4 + o(x^4)$$

$$= 1 + x^2 - \frac{x^3}{2} + \frac{2+3}{6}\cdot x^4 + o(x^4)$$

Quindi risulta $T_4(x) = 1 + x^2 - \frac{x^3}{3} + \frac{5}{6}x^4.$

Esercizio 3 **[4 punti]**

Calcolare l'integale definito

$$I := \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x) \cdot \sqrt{1+\sin(x)}\, dx$$

Sol: Usiamo la sostituzione $t = 1 + \sin(x)$ (N.B.: si può anche usare $t = \sqrt{1+\sin(x)}$)

$\Rightarrow$
- $\frac{dt}{dx} = \cos(x) \Rightarrow dt = \cos(x)\, dx$
- $x = 0 \Rightarrow t = 1 + \sin(0) = 1$
- $x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 1 + \sin(\frac{\pi}{2}) = 1 + 1 = 2$

Quindi risulta

$$I = \int_1^2 \sqrt{t}\, dt = \int_1^2 t^{1/2} dt = \frac{2}{3} \cdot t^{3/2} \Big|_1^2$$

$$= \frac{2}{3}\left(2^{3/2} - 1^{3/2}\right) = \frac{2}{3} \cdot (2 \cdot \sqrt{2} - 1).$$

Esercizio 4 **[4 punti]**

Calcolare la derivata direzionale $D_v f(1,1)$ di $f(x,y) = \sinh(x^2 - y)$ nella direzione $v = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$.

Sol: f è C^1, quindi differenziabile. Per il teorema del gradiente segue

$$D_v f(1,1) = f_x(1,1) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + f_y(1,1) \cdot \frac{-1}{\sqrt{2}}$$

- $f_x(x,y) = \cosh(x^2 - y) \cdot 2x \Rightarrow f_x(1,1) = \cosh(1^2 - 1) \cdot 2 \cdot 1 = \overbrace{\cosh(0)}^{=1} \cdot 2 = 2$
- $f_y(x,y) = \cosh(x^2 - y) \cdot (-1) \Rightarrow f_y(1,1) = \cosh(1^2 - 1) \cdot (-1) = -1$

Quindi risulta $D_v f(1,1) = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + (-1) \cdot \frac{-1}{\sqrt{2}}$

$$= \frac{3}{\sqrt{2}}$$

Esercizio 5 [6 punti]

Determinare il dominio, eventuali simmetrie, zeri, asintoti ed estremi locali della funzione

$$f(x) = \frac{x^3}{3 - x^2}$$

e tracciarne un grafico approssimativo.

Sol: • Dominio X di f: $x \in X \iff 3 - x^2 \neq 0 \iff x \neq \pm\sqrt{3}$

Quindi $X = \mathbb{R} \setminus \{-\sqrt{3}, +\sqrt{3}\}$.

• Simmetrie: $f(x) = \dfrac{x^3}{3 - x^2}$ funzione dispari / funzione pari

$\Rightarrow$ $f(x)$ è dispari, cioè $f(-x) = -f(x) \quad \forall x \in X$.

Di conseguenza basta studiare $f(x)$ per $x \geq 0$ visto che il grafico è simmetrico rispetto all'origine.

• Zeri: $f(x) = 0 \iff x^3 = 0 \iff x = 0$.

Cioè $x_0 := 0$ è l'unico zero di f.

• Asintoti: $\displaystyle\lim_{x \to \sqrt{3}^-} \frac{x^3}{3 - x^2} = \frac{\sqrt{3}^3}{0^+} = +\infty$ $\quad \sqrt{3}^3 > 0$

$$\lim_{x \to \sqrt{3}^+} \frac{x^3}{3 - x^2} = \frac{\sqrt{3}^3}{0^-} = -\infty$$

$\Rightarrow$ $x = \sqrt{3}$ è un'asintoto verticale, quindi per simmetria anche

$x = -\sqrt{3}$ —— || ——

• $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{x^3}{3 - x^2} = -\infty$ $\Rightarrow$ possibile asintoto obliquo per $x \to +\infty$.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^3}{3x - x^3} = -1 =: m.$$

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - m \cdot x) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x^3}{3 - x^2} - (-x) \right)$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\cancel{x^3} + 3x - \cancel{x^3}}{3 - x^2} = 0 =: q$$

$\Rightarrow$ $y = mx + q = -x$ è un asintoto obliquo per $x \to +\infty$

$\Rightarrow$ (per simmetria) $y = -x$ è un asintoto obliquo per $x \to -\infty$.

- Estremi locali:

$$f'(x) = \frac{(3-x^2)\cdot 3x^2 + (+2x)\cdot x^3}{(3-x^2)^2} = \frac{9x^2 - 3x^4 + 2x^4}{(3-x^2)^2}$$

$$= \frac{9x^2 - x^4}{(3-x^2)^2} = x^2 \cdot \frac{9-x^2}{(3-x^2)^2}$$

$$= 0 \iff x = 0 \quad \text{oppure} \quad x = \pm\sqrt{9} = \pm 3.$$

Inoltre $f'(x)$ cambia segno in $x_1 := 3$ da "+" a "−"

$\Rightarrow$ $x_1 = 3$ è un punto di massimo locale.

$\Rightarrow$ (per simmetria) $x_2 = -3$ è un punto di minimo locale.

Infine, $f'(x)$ poco prima e dopo $x=0$ è positivo $\Rightarrow$ $x=0$ non è un punto di estremo locale.

Grafico: