Analisi Matematica. Durata della prova: 2 ore **12.2.24**

Firma: ....

Cognome .... **Nome** ....

Matricola .... **Corso di Laurea:** Informatica

D1	
D2	
E1	
E2	
E3	
E4	
E5	
Σ	

Domanda 1 [4 punti]

(i) Dare la definizione di funzione crescente $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

(ii) Verificare che $f(x) = 3x^3 - 2x^2 + x - 1$, $x \in \mathbb{R}$ è strettamente crescente

Risposta

(i) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è crescente se $x_1 \le x_2$ implica che $f(x_1) \le f(x_2)$.

(ii) • f è derivabile, quindi è strettamente crescente se $f'(x) > 0 \; \forall x \in \mathbb{R}$
• $f'(x) = 9x^2 - 4x + 1$ non ha zeri (reali) visto che $\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 9 \cdot 1 < 0$. Quindi $f'(x) > 0$ poiché il coefficiente principale $a = 9 > 0$.
Quindi risulta che f è strettamente crescente

Domanda 2 [4 punti]

(i) Enunciare la Formula di Taylor con resto di Peano

(ii) Calcolare il polinomio di Maclaurin di ordine 3 di $f(x) = 1 + x \cdot e^{4x}$

Risposta

(i) Se $f \in C^n(a,b)$ e $x_0 \in (a,b)$, allora $\forall x \in (a,b)$ vale

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x - x_0)^k + o((x-x_0)^n) \text{ per } x \to x_0.$$

(ii) • $e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + o(t^2) \overset{t=4x}{\Longrightarrow} e^{4x} = 1 + 4x + \frac{16 \cdot x^2}{2} + o(x^2)$
$= 1 + 4x + 8x^2 + o(x^2)$

$\Rightarrow x \cdot e^{4x} = x + 4x^2 + 8x^3 + x \cdot o(x^2) = x + 4x^2 + 8x^3 + o(x^3)$

$\Rightarrow \underline{\underline{T_3(x) = 1 + x + 4x^2 + 8x^3}}$

Esercizio 1

[5 punti]

Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{x \cdot (\cos(x)+1) - \sin(2x)}{x \cdot \ln(1-x^2)} =: \ell$$

Risoluzione

• Denominatore: $\ln(1+t) \sim t$ per $t \to 0$ $\Rightarrow$

$\ln(1-x^2) \sim -x^2$ per $x \to 0$ $\Rightarrow$ $x \cdot \ln(1-x^2) \sim x \cdot (-x^2) = -x^3$ per $x \to 0$

• Numeratore (da sviluppare fino al 3° ordine):

· $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)$ per $x \to 0$ $\Rightarrow$

$x \cdot (\cos(x)+1) = x \cdot \left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3) + 1\right) = 2x - \frac{x^3}{2} + o(x^3)$

· $\sin(t) = t - \frac{t^3}{6} + o(t^3)$ per $t \to 0$ $\Rightarrow$ (con $t = 2x$)

$\sin(2x) = 2x - \frac{(2x)^3}{6} + o(x^3) = 2x - \frac{8}{6}x^3 + o(x^3)$ per $x \to 0$

$\Rightarrow$ $x \cdot (\cos(x)+1) - \sin(2x) = \cancel{2x} - \frac{x^3}{2} - \cancel{2x} + \frac{8}{6}x^3 + o(x^3)$

$= \frac{8-3}{6} \cdot x^3 + o(x^3) \sim \frac{5}{6} \cdot x^3$ per $x \to 0$

$\Rightarrow$ $\ell = \lim_{x\to 0} \frac{5/6 \cdot \cancel{x^3}\ 1}{-\cancel{x^3}\ 1} = \underline{\underline{-\frac{5}{6}}}$

Esercizio 2

[5 punti]

Calcolare, se converge, l'integrale improprio

$$I := \int_0^2 \frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{2x}}\, dx$$

Risoluzione

• $\frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{2x}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \left(\frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \left(x^{-\frac{1}{2}} + 1\right)$

• $\int \frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{2x}}\, dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \int x^{-\frac{1}{2}} + 1\, dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \left(\frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + x\right) + c$

$= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \left(2 \cdot x^{\frac{1}{2}} + x\right) + c$

• $I = \lim_{a\to 0^+} \int_a^2 \frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{2x}} = \lim_{a\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \left[2 \cdot x^{\frac{1}{2}} + x\right]_a^2$

$= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \left(2 \cdot 2^{\frac{1}{2}} + 2 - 2 \cdot 0^{\frac{1}{2}} - 0\right)$

$= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \left(2 \cdot \sqrt{2} + 2\right)$

$= 2 + \frac{\overset{2}{\cancel{2}} \cdot \sqrt{2}}{\underbrace{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}_{=\cancel{2}\ 1}} = \underline{\underline{2 + \sqrt{2}}}$

Esercizio 3

[4 punti]

Calcolare il piano tangente $p(x,y)$ della funzione $f(x,y) = \dfrac{x^3 - x^2y + 2y^2}{x}$ nel punto $(x_0,y_0) = (-1,2)$

Risoluzione

- $p(x,y) = f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)\cdot(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)\cdot(y-y_0)$
- $f(x_0,y_0) = \dfrac{(-1)^3 - (-1)^2\cdot 2 + 2\cdot 2^2}{-1} = \dfrac{-1-2+8}{-1} = -5$
- $f_x(x,y) = \dfrac{x\cdot(3x^2-2xy) - 1\cdot(x^3-x^2y+2y^2)}{x^2} \Rightarrow$

$f_x(x_0,y_0) = \dfrac{-1(3(-1)^2-2(-1)\cdot 2) - 5}{(-1)^2} = -(3+4)-5 = -12$

- $f_y(x,y) = \frac{1}{x}\cdot(-x^2+4y) \Rightarrow$

$f_y(x_0,y_0) = \frac{1}{-1}\cdot(-(-1)^2+4\cdot 2) = -(-1+8) = -7$

$\Rightarrow$ $p(x,y) = -5-12(x+1)-7\cdot(y-2)$

Esercizio 4

[4 punti]

Studiare la continuità, la derivabilità e la differenziabilità in $(x_0,y_0) = (0,0)$ della funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3\cdot\sin(y^3)}{x^6+y^6} - 4y & \text{se } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

Risoluzione

- Ponendo $y = x$ segue

$$\lim_{x\to 0} f(x,x) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{x^3\cdot\overbrace{\sin(x^3)}^{\sim x^3}}{\underbrace{x^6+x^6}_{=2x^6}} - \underbrace{4x}_{\to 0}\right) = \frac{1}{2} \neq f(0,0) = 0$$

$\Rightarrow$ f non è continua in $(0,0)$ $\Rightarrow$ f non è differenziabile in $(0,0)$

Derivabilità: • $f(h,0) = 0 \Rightarrow$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\overbrace{\frac{0-0}{h}}^{=0} = 0 = f_x(0,0)$$

- $f(0,h) = -4h \Rightarrow$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{-4\cancel{h}-0}{\cancel{h}} = -4 = f_y(0,0)$$

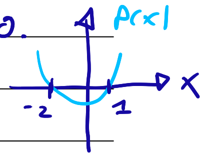
Quindi f è derivabile parzialmente in $(0,0)$ con grad $f(0,0) = (0,-4)$

Esercizio 5 **[6 punti]**

Trovare dominio, eventuali zeri, asintoti ed estremi locali della funzione $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+x-2}}{x}$ e tracciarne un grafico approssimativo

Risoluzione

- **Dominio** X: $\quad x \in X \iff x \neq 0$ e $p(x) := x^2 + x - 2 \geq 0$.



$p(x) = 0 \iff x = x_{1,2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1+4\cdot 2}}{2} = \dfrac{-1 \pm 3}{2} = \begin{cases} -2 \\ 1 \end{cases}$

Quindi $p(x) \geq 0 \iff x \leq -2$ opp. $x \geq 1$.

$\Rightarrow X = (-\infty, -2] \cup [1, +\infty)$

- **Zeri**: $f(x) = 0 \iff p(x) = 0 \iff x = -2$ opp. $x = 1$.

- **Asintoti**: $\displaystyle\lim_{x \to -2^-} f(x) = \frac{0}{-2} = 0 \quad \lim_{x \to 1^+} f(x) = \frac{0}{1} = 0.$

Quindi non ci sono asintoti verticali

$\displaystyle\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{|x| \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}}}{x} = \pm 1$. Quindi

$y = \pm 1$ è asintoto orizzontale per $x \to \pm\infty$.

- **Estremi Locali**: $f'(x) = \dfrac{x \cdot \frac{1}{2}(x^2+x-2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (2x+1) - 1 \cdot (x^2+x-2)^{\frac{1}{2}}}{x^2} \cdot \dfrac{(x^2+x-2)^{\frac{1}{2}}}{(x^2+x-2)^{\frac{1}{2}}}$

$= \dfrac{(\cancel{x^2} + \frac{1}{2}x) - (\cancel{x^2} + x - 2)}{x^2 \cdot \sqrt{x^2+x-2}} = \dfrac{2 - \frac{x}{2}}{\underbrace{x^2 \cdot \sqrt{x^2+x-2}}_{>0}} = 0 \iff 2 - \frac{x}{2} = 0 \iff x = 4$

Inoltre $f'(x)$ cambia segno in $x = 4$ da "+" a "−" $\Rightarrow$ $x = 4$ è un punto di massimo di f.

Grafico: