Analisi Matematica 1, Scritto 1-A. Durata della prova: 2 ore **12.6.18**

Firma: ....

Cognome .... **Nome** .... **A.A.** ....

Matricola .... **Corso di Laurea** ....

D1	
D2	
E1	
E2	
E3	
E4	
E5	
Σ	

Domanda 1

[4 punti]

(i) Dare la definizione di $\sup A$ e di $\max A$ per un insieme $A \subset \mathbb{R}$.

(ii) Dare un esempio di un insieme $A \subset \mathbb{R}$ che non possiede massimo e calcolarne l'estremo superiore.

Risposta

(i) $\Rightarrow$ Appunti

(ii) Sia $A := (0,1)$, allora $\sup A = 1$ ma $\max A$ non esiste

Domanda 2

[4 punti]

(i) Sia $f \in C^n(a,b)$ e sia $x_0 \in (a,b)$. Enunciare il teorema sulla formula di Taylor per f di centro x_0 con il resto di Peano di ordine n.

(ii) Data la funzione $f(x) = (x+3) \cdot \ln(x+3)$, scriverne lo sviluppo di Taylor con resto di Peano di ordine 2 centrato in $x_0 = -1$.

Risposta

(i) $\Rightarrow$ Appunti

(ii) $T_2(x) = f(-1) + f'(-1) \cdot (x+1) + \frac{f''(-1)}{2} \cdot (x+1)^2$.

$\cdot\ f(-1) = (-1+3) \cdot \ln(-1+3) = 2 \cdot \ln(2)$

$\cdot\ f'(x) = \ln(x+3) + 1 \Rightarrow f'(-1) = \ln(2) + 1$

$\cdot\ f''(x) = \frac{1}{x+3} \Rightarrow f''(-1) = \frac{1}{2}$.

$\Rightarrow T_2(x) = 2 \cdot \ln(2) + (\ln(2)+1) \cdot (x-1) + \frac{1}{4} \cdot (x-1)^2$

$\Rightarrow f(x) = 2 \cdot \ln(2) + (\ln(2)+1)(x-1) + \frac{1}{4}(x-1)^2 + o((x-1)^2)$ per $x \to -1$

Esercizio 1

[5 punti]

Studiare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^{\ln(n^3)}}{n!} =: a_n > 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$$

Risoluzione

Applichiamo il criterio del rapporto:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{7^{\ln((n+1)^3)}}{\underbrace{(n+1)!}_{=(n+1)\cdot n!}} \cdot \frac{n!}{7^{\ln(n^3)}} = \frac{7^{\ln((n+1)^3) - \ln(n^3)}}{n+1}$$

$$= \frac{7^{\ln\left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^3\right)}}{n+1} \qquad (n \to +\infty) \quad \left(\frac{n+1}{n}\right)^3 \to 1^3 = 1, \quad \ln(1) = 0$$

$$\xrightarrow{(n \to +\infty)} \frac{\overset{=1}{7^0}}{n+1} = 0 = q < 1$$

$\Rightarrow$ La serie converge (assolutamente)

Esercizio 2

[5 punti]

Calcolare il seguente integrale

$$\int_0^{\pi} \underset{f}{x} \cdot \underset{g'}{\sin\left(\tfrac{x}{3}\right)}\, dx. =: I$$

Risoluzione

Si usa int. per parti:

$$I = \underset{f}{x} \cdot \underset{g}{\left(-3 \cdot \cos\left(\tfrac{x}{3}\right)\right)}\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \underset{f'}{1} \cdot \underset{g}{\left(-3 \cdot \cos\left(\tfrac{x}{3}\right)\right)}\, dx$$

$$= -3\pi \cdot \cos\left(\tfrac{\pi}{3}\right) + 3 \cdot \int_0^{\pi} \cos\left(\tfrac{x}{3}\right) dx$$

$$= -3\pi \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot 3 \cdot \sin\left(\tfrac{x}{3}\right)\Big|_0^{\pi} = -\frac{3}{2}\pi + 9 \cdot \sin\left(\tfrac{\pi}{3}\right)$$

$$= 9 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}\pi.$$

Esercizio 3

[4 punti]

Studiare la continuità, la derivabilità e la differenziabilità in $(0,0)$ della funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2-y}{\sqrt[3]{x^3+y^3}} & \text{se } x \neq -y, \\ 0 & \text{se } x = -y. \end{cases}$$

Risoluzione

$f(x,0) = \frac{x^2}{\sqrt[3]{x^3}} = \frac{x^2}{x} = x \to 0$ per $x \to 0$

$f(0,y) = \frac{-y}{\sqrt[3]{y^3}} = -\frac{y}{y} = -1 \to -1$ per $y \to 0$

$\Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ non $\exists$ $\Rightarrow$ f non è continua in $(0,0)$ $\Rightarrow$ f non è differenziab. in $(0,0)$

$\lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h-0}{h} = 1 = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$

$\lim_{h\to 0} \frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-1-0}{h}$ non $\exists$

$\Rightarrow$ f non è derivabile in $(0,0)$

Esercizio 4

[4 punti]

Trovare il piano tangente in $(x_0, y_0) = (0,1)$ alla funzione $f(x,y) = \frac{e^{xy}}{y}$.

Risoluzione

$p(x,y) = f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)\cdot(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)\cdot(y-y_0)$

- $f(x_0,y_0) = \frac{e^{0\cdot 1}}{1} = 1$
- $f_x(x,y) = \frac{e^{xy}}{y}\cdot y = e^{xy} \Rightarrow f_x(x_0,y_0) = e^{0\cdot 1} = 1$
- $f_y(x,y) = \frac{y\cdot e^{xy}\cdot x - 1\cdot e^{xy}}{y^2} \Rightarrow f_y(x_0,y_0) = \frac{-e^{0\cdot 1}}{1^2} = -1$

Quindi $p(x,y) = 1 + 1\cdot(x-0) - 1\cdot(y-1)$

$= 1 + x - (y-1)$

Esercizio 5

[6 punti]

Data la funzione

$$f(x) = \frac{|x-2|}{x+1} = \begin{cases} \frac{x-2}{x+1}, & x \geq 2 \\ \frac{2-x}{x+1}, & x < 2,\ x \neq -1 \end{cases}$$

trovarne il dominio, l'insieme in cui è continua, l'insieme in cui è derivabile, eventuali asintoti e punti di estremo locale e tracciarne un grafico approssimativo.

Risoluzione

- dominio: $\mathbb{R} \setminus \{-1\} =: X$

- f è continua su X

- f è derivabile su $X \setminus \{2\}$

- $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x-2}{x+1} = 1$
  $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{2-x}{x+1} = -1$
  $\Big\}$ $y = \pm 1$ è un asintoto orizzontale per $x \to \pm\infty$

- $\lim_{x \to -1^+} f(x) = \frac{3}{0^+} = +\infty$, $\lim_{x \to -1^-} f(x) = \frac{3}{0^-} = -\infty$

  $\Rightarrow x = -1$ è un asintoto verticale.

- $f'(x) = \begin{cases} \frac{(x+1)\cdot 1 - 1\cdot(x-2)}{(x+1)^2} = \frac{3}{(x+1)^2}, & x \geq 2 \\ -\frac{3}{(x+1)^2}, & x < 2,\ x \neq -1 \end{cases}$

$\Rightarrow$ non ci sono punti critici.

$\Rightarrow$ l'unico candidato per un pto. di estr. loc. è $x_0 = 2$

- Grafico: