Analisi Matematica 1, Scritto 1-A. Durata della prova: 2 ore **12.6.23**

Firma: ....

Cognome .... **Nome** ....

Matricola .... **Corso di Laurea** ....

D1	
D2	
E1	
E2	
E3	
E4	
E5	
Σ	

Domanda 1

[4 punti]

(i) Enunciare il teorema degli zeri.

(ii) Verificare che l'equazione $\ln(x) = \sin(x)$ ammette almeno una soluzione $x > 1$.

Risposta

(i) Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ è continua con $f(a) \cdot f(b) < 0$,

allora $\exists\, c \in (a,b)$ t.c. $f(c) = 0$.

(ii)
- x è una soluzione $\Leftrightarrow$ $f(x) := \ln(x) - \sin(x) = 0$.
- $f(1) = \ln(1) - \sin(1) = -\sin(1) < 0$
- $f(\pi) = \ln(\pi) - \sin(\pi) = \ln(\pi) > 0$
- $f : [1, \pi] \to \mathbb{R}$ è continua

$\Rightarrow \exists\, x = c \in (1, \pi)$ t.c. $f(x) = 0$.

Domanda 2

[4 punti]

(i) Dare la definizione di derivabilità di una funzione $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ nel punto $x_0 \in (a,b)$.

(ii) Calcolare l'equazione della retta tangente al grafico di $f(x) = \dfrac{x^2}{1+x}$ nel punto $x_0 = 1$.

Risposta

(i) f è derivabile in $x_0 \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} =: f'(x_0) \in \mathbb{R}$ converge.

(ii)
- l'equazione della retta tangente è $t(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$
- $f(x_0) = \dfrac{1^2}{1+1} = \dfrac{1}{2}$
- $f'(x) = \dfrac{(1+x) \cdot 2x - 1 \cdot x^2}{(1+x)^2} = \dfrac{2x + x^2}{(1+x)^2} \Rightarrow f'(x_0) = \dfrac{2 \cdot 1 + 1^2}{(1+1)^2} = \dfrac{3}{4}$

Quindi $\underline{\underline{t(x) = \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \cdot (x - 1)}}$

Esercizio 1

[4 punti]

Studiare la convergenza semplice e assoluta della serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \cdot \frac{n^2}{2^n} =: a_n$$

Risoluzione

Applicando il criterio del rapporto segue

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{(n+1)^2 \cdot 2^n}{2^{n+1} \cdot n^2} = \underbrace{\left(\frac{n+1}{n}\right)^2}_{\to 1 \text{ per } n \to +\infty} \cdot \frac{1}{2} \to \frac{1}{2} =: q \quad \text{per } n \to +\infty$$

Visto che $q = \frac{1}{2} < 1$ segue che la serie converge assolutamente e quindi anche semplicemente.

Esercizio 2

[5 punti]

Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{-x} + \ln(1+x) - 1}{x \cdot \big(1 - \cos(x)\big)} =: \ell$$

Risoluzione

- <u>Denominatore</u>: $1 - \cos(x) \sim \frac{x^2}{2}$ per $x \to 0$

$\Rightarrow$ (per il principio di sostituzione) $x \cdot (1 - \cos(x)) \sim \frac{x^3}{2}$ per $x \to 0$

- <u>Numeratore</u> da sviluppare fino al 3° ordine:

$$e^{-x} + \ln(1+x) - 1 = \cancel{1} \cancel{- x} + \cancel{\frac{x^2}{2}} - \frac{x^3}{6} \cancel{+ x} \cancel{- \frac{x^2}{2}} + \frac{x^3}{3} \cancel{- 1} + o(x^3)$$
$$= \left(\frac{2}{6} - \frac{1}{6}\right) x^3 + o(x^3) \sim \frac{x^3}{6} \quad \text{per } x \to 0$$

P.d.S.

$$\Longrightarrow \frac{e^{-x} + \ln(1+x) - 1}{x \cdot (1 - \cos(x))} \sim \frac{x^3/6}{x^3/2} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} = \ell$$

Esercizio 3

[5 punti]

Calcolare l'integrale

$$I := \int_0^{\pi^2} \sin\sqrt{x}\, dx.$$

Risoluzione

Usando la sostituzione $t = \sqrt{x} \Rightarrow x = t^2$ risulta:

- $\frac{dx}{dt} = 2t \Rightarrow dx = 2t\, dt$
- $x = 0 \Rightarrow t = \sqrt{0} = 0$

  $x = \pi^2 \Rightarrow t = \sqrt{\pi^2} = \pi$

Quindi segue

integrazione per parti

$$I = \int_0^\pi \underbrace{2t}_{= f} \cdot \underbrace{\sin(t)}_{= g'}\, dt = \underbrace{2t \cdot (-\cos(t))}_{f \cdot g}\Big|_0^\pi + \int_0^\pi \underbrace{2 \cdot (+\cos(t))}_{f' \cdot g}\, dt$$

$$= 2\pi \cdot (-\underbrace{\cos(\pi)}_{= -1}) - 0 \cdot (-\cos(0)) + 2 \cdot \sin(t)\Big|_0^\pi$$

$$= 2\pi + 2 \cdot (\underbrace{\sin(\pi)}_{= 0} - \underbrace{\sin(0)}_{= 0}) = \underline{\underline{2\pi}}$$

Esercizio 4

[4 punti]

Calcolare la derivata direzionale della funzione $f(x, y) = x \cdot e^{(\sin(x)+y)}$ nel punto $(x_0, y_0) = (\pi, 1)$ nella direzione $v = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$.

Risoluzione

- Per il teorema del gradiente vale

  $D_v f(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0) \cdot v_1 + f_y(x_0, y_0) \cdot v_2$

- $f_x(x, y) = 1 \cdot e^{\sin(x)+y} + x \cdot e^{\sin(x)+y} \cdot \cos(x) \Rightarrow$

  $f_x(x_0, y_0) = e^{\underbrace{\sin(\pi)}_{=0}+1} + \pi \cdot e^{\underbrace{\sin(\pi)}_{=0}+1} \cdot \underbrace{\cos(\pi)}_{=-1} = e - \pi \cdot e$

- $f_y(x, y) = x \cdot e^{\sin(x)+y} \cdot 1 \Rightarrow$

  $f_y(x_0, y_0) = \pi \cdot e^{\sin(\pi)+1} = \pi \cdot e$

$\Rightarrow D_v f(\pi, 1) = (e - \pi \cdot e) \cdot \frac{3}{5} + \pi \cdot e \cdot \frac{4}{5}$

$= \underline{\frac{e}{5} \cdot (3 + \pi)}$

Esercizio 5 **[6 punti]**

Trovare dominio, eventuali zeri, asintoti e punti di estremo locale della funzione $f(x) = (2x^2 - 5x + 2) \cdot e^x$ e tracciarne un grafico approssimativo.

Risoluzione

- Dominio: $X = \mathbb{R}$
- Zeri: $f(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 5x + 2 = 0$

  $\Leftrightarrow x = x_{1/2} = \dfrac{5 \pm \sqrt{\underbrace{25 - 4 \cdot 2 \cdot 2}_{=9}}}{2 \cdot 2} = \dfrac{5 \pm 3}{4} = \begin{cases} 2 \\ \frac{1}{2} \end{cases}$

- Asintoti: $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$

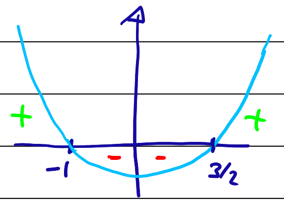
  $\Rightarrow y = 0$ è un asintoto orizzontale di f per $x \to -\infty$.

- Estremi Locali: $f'(x) = (4x - 5) \cdot e^x + (2x^2 - 5x + 2) \cdot e^x$

  $= (\underbrace{2x^2 - x^2 - 3}_{=: p(x)}) \cdot \underbrace{e^x}_{>0\ \forall x \in \mathbb{R}} = 0 \Leftrightarrow$

  $x = x_{3/4} = \dfrac{1 \pm \sqrt{\underbrace{1^2 + 4 \cdot 2 \cdot 3}_{=25}}}{4}$

  $= \dfrac{1 \pm 5}{4} = \begin{cases} \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \\ -\frac{4}{4} = -1 \end{cases}$



Inoltre $f'(x)$ cambia segno in
- $x_3 = 3/2$ da "−" a "+" $\Rightarrow x = 3/2$ è un pto. di minimo locale
- $x_4 = -1$ da "+" a "−" $\Rightarrow x = -1$ è un pto. di massimo locale

- Segno di f: $f(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \leq \frac{1}{2} = x_1$ opp. $x \geq 2 = x_1$
- $f(0) = 2 \cdot e^0 = 2$

Grafico: