

Cognome.....Nome.....A.A.....

Matricola.....Corso di Laurea.....

Canale	
A	B C D
D1	
D2	
E1	
E2	
E3	
E4	
E5	
Σ	

Domanda 1

[3 punti]

- (i) Dare la definizione di successione convergente.
- (ii) Fare un esempio di una successione convergente e tale che $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 1$

Risposta

(i) _____

Vedi dispense / libro

(ii) _____

Ad esempio $a_n = 1 + \frac{1}{n}$

Domanda 2

[4 punti]

- (i) Dare la definizione di derivata di una funzione $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ in un punto $x_0 \in (a, b)$.
- (ii) Disegnare il grafico di una funzione $f : (-2, 2) \rightarrow \mathbb{R}$ con derivata $f'(0) = 1$ con $x = 1$ punto angoloso.

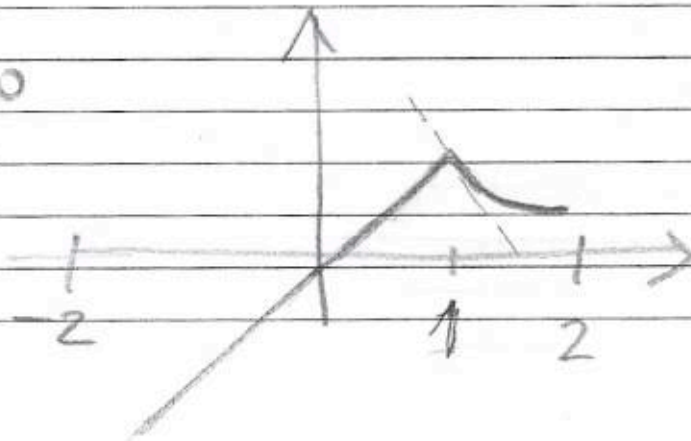
Risposta

(i) _____

Vedi dispense / libro

(ii) _____

Ad esempio



Esercizio 1

[5 punti]

Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(2n)!}$$

Risoluzione

Si utilizza il criterio del rapporto

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^{n+1}}{(2n+2)!} \cdot \frac{(2n)!}{2^n} = \frac{2}{(2n+2)(2n+1)}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0 < 1$$

SERIE CONVERGENTE

Esercizio 2

[5 punti]

Calcolare l'integrale indefinito

$$\int \ln(x^2 - 1) dx$$

Risoluzione

Si utilizza integrazione per parti

$$\int \ln(x^2 - 1) dx = x \ln(x^2 - 1) - \int \frac{x \cdot 2x}{x^2 - 1} dx$$

$$= x \ln(x^2 - 1) - 2x - \int \frac{2}{x^2 - 1} dx$$

$$= x \ln(x^2 - 1) - 2x - \int \frac{1}{x-1} dx + \int \frac{1}{x+1} dx$$

$$= x \ln(x^2 - 1) - 2x - \ln|x-1| + \ln|x+1| + C$$

Esercizio 3

[4 punti]

Calcolare il gradiente e l'equazione del piano tangente nel punto (3, 5) della funzione $f(x, y) = e^{x^2y}xy^3$.

Risoluzione

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^{x^2y} (2xy)xy^3 + e^{x^2y} y^3 = e^{x^2y} y^3 (2x^2y + 1)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = e^{x^2y} (x^2)xy^3 + e^{x^2y} x^2 \cdot 3y^2 = e^{x^2y} x^2 y^2 (x^2y + 3)$$

$$\nabla f(3, 5) = e^{45} (5 \cdot (18 \cdot 5 + 1), 3 \cdot 25 \cdot 48)$$

$$Z = \left[f(3, 5) + \frac{\partial f}{\partial x}(3, 5)(x-3) + \frac{\partial f}{\partial y}(3, 5)(y-5) \right]$$

Esercizio 4

[4 punti]

Sia $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq y \leq 2x, \frac{2\pi}{x} \leq y \leq \frac{3\pi}{x}, x > 0\}$. Calcolare l'integrale

$$\iint_S xy \sin(xy) dx dy.$$

Risoluzione

Cambiamento variabili:

$$s = \frac{y}{x}, \quad t = xy \Rightarrow \tilde{S} = \left\{ 1 \leq s \leq 2 \text{ e } 2\pi \leq t \leq 3\pi \right\}$$

$$dx dy = \frac{1}{2s} ds dt$$

$$\Rightarrow \iint_{\tilde{S}} \left(\frac{t}{2s} \sin t \right) ds dt = \left(\int_1^2 \frac{ds}{2s} \right) \left(\int_{2\pi}^{3\pi} t \sin t dt \right)$$

$$= \left(\frac{5}{2} \ln 2 \right) \pi$$

Esercizio 5

[7 punti]

Trovare il dominio, eventuali asintoti, intervalli di monotonia e punti di estremo locale della funzione $f(x) = e^{\frac{x-1}{2x+1}}$ e tracciarne un grafico approssimativo.

Risoluzione

$$\text{Dominio: } (-\infty, -\frac{1}{2}) \cup (-\frac{1}{2}, +\infty)$$

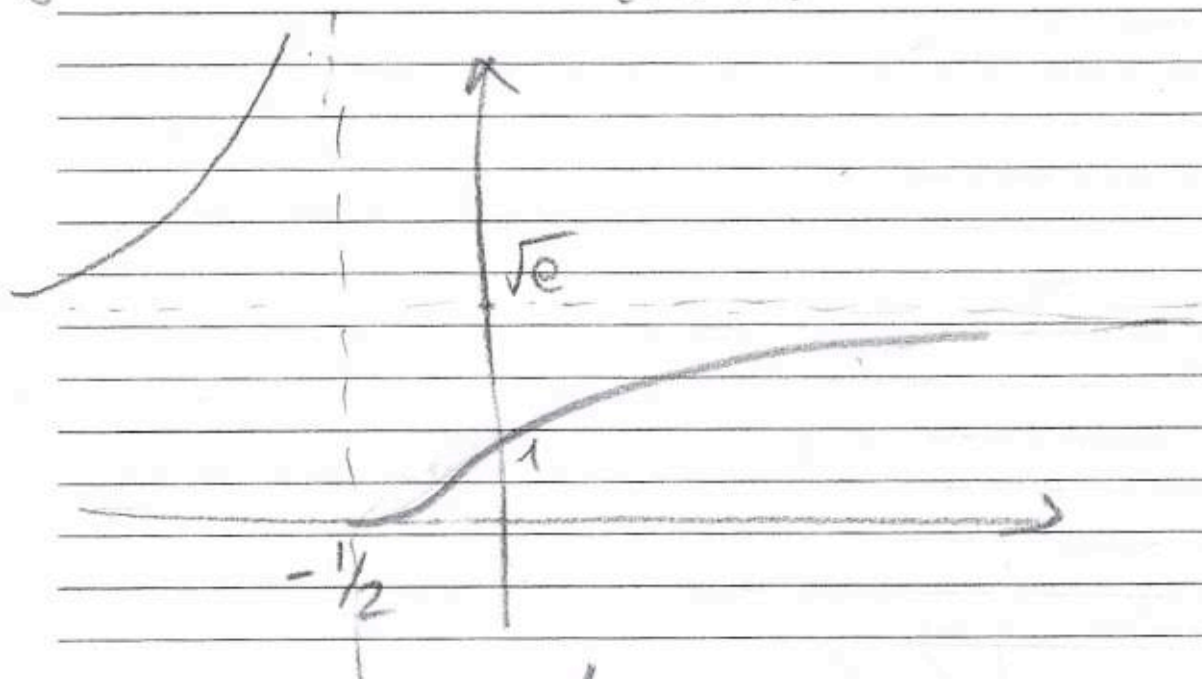
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \sqrt{e} \quad \text{asint. orizzontale}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \sqrt{e} \quad \text{asint. orizzontale}$$

$$\lim_{x \rightarrow (-\frac{1}{2})^-} f(x) = +\infty \quad \text{as. verticale}$$

$$\lim_{x \rightarrow (-\frac{1}{2})^+} f(x) = 0$$

$$f'(x) = e^{\frac{x-1}{2x+1}} \frac{3}{(2x+1)^2} > 0 \quad \forall x$$



$$\lim_{x \rightarrow (-\frac{1}{2})^+} f'(x) = 0$$