Analisi Matematica 1, Scritto 1-B. Durata della prova: 2 ore 11.6.13

Firma: ...

Cognome .... **Nome** .... **A.A.** ....

Matricola .... **Corso di Laurea** .... **Canale** A B C D

D1	
D2	
E1	
E2	
E3	
E4	
E5	
Σ	

Domanda 1

[3 punti]

(i) Dare la definizione di successione positivamente divergente.

(ii) Fare un esempio di una successione negativamente divergente.

Risposta

(i)

vedi dispense / libro

(ii) Ad es. $a_n = -n$

Domanda 2

[4 punti]

(i) Dare la definizione di derivata di una funzione $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ in un punto $x_0 \in (a, b)$.

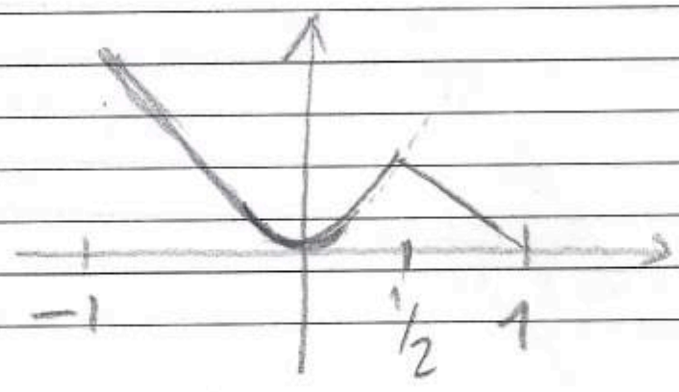
(ii) Disegnare il grafico di una funzione $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ con derivata $f'(0) = 0$ con $x = 1/2$ punto angoloso.

Risposta

(i)

vedi dispense / libro

(ii) Ad es.



Esercizio 1

[5 punti]

Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{(3n)!}$$

Risoluzione

Si utilizza il criterio del rapporto

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3^{n+1}}{(3n+3)!} \frac{(3n)!}{3^n} = \frac{3}{(3n+3)(3n+2)(3n+1)}$$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0 < 1$$

SERIE CONVERGENTE

Esercizio 2

[5 punti]

Calcolare l'integrale indefinito

$$\int x \ln(x-1)\, dx$$

Risoluzione

Si utilizza integrazione per parti

$$\int x \ln(x-1)\, dx = \frac{x^2}{2} \ln(x-1) - \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{x-1} dx$$

$$= \frac{x^2}{2} \ln(x-1) - \frac{1}{2} \int (x+1)\, dx - \frac{1}{2} \int \frac{1}{x-1} dx$$

$$= \frac{x^2}{2} \ln(x-1) - \frac{1}{4} (x+1)^2 - \frac{1}{2} \ln|x-1| + C.$$

Esercizio 3

[4 punti]

Calcolare il gradiente e l'equazione del piano tangente nel punto $(2, 1)$ della funzione $f(x, y) = e^{y^2 x} y x^2$.

Risoluzione

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^{y^2 x}(y^2) y x^2 + e^{y^2 x} y 2x = e^{y^2 x} y x (y^2 x + 2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = e^{y^2 x}(2yx) y x^2 + e^{y^2 x} x^2 = e^{y^2 x} x^2 (2xy^2 + 1)$$

$$\nabla f(2,1) = e^2 (8, 20)$$

$$z = e^2 \left[4 + 8(x-2) + 20(y-1) \right]$$

Esercizio 4

[4 punti]

Sia $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq x \leq 3y \ , \ \frac{\pi}{y} \leq x \leq \frac{2\pi}{y} \ , \ y > 0\}$. Calcolare l'integrale

$$\int\int_S xy \cos(xy) \, dx dy.$$

Risoluzione

cambiamento di variabili:

$$s = x/y \ ; \ t = xy \Rightarrow \tilde{S} = \left\{ \begin{array}{l} 1 \leq s \leq 3 \ \text{e} \\ \pi \leq t \leq 2\pi \end{array} \right\}$$

$$dx\,dy = \frac{1}{2s} ds\,dt$$

$$\Rightarrow \int\int_{\tilde{S}} \left(\frac{t}{2s} \cos t \right) dt\,ds = \left(\int_1^3 \frac{ds}{2s} \right) \left(\int_\pi^{2\pi} t \cos t \, dt \right)$$

$$= \left(\frac{1}{2} \ln 3 \right) 2 = \ln 3$$

Esercizio 5

[7 punti]

Trovare il dominio, eventuali asintoti, intervalli di monotonia e punti di estremo locale della funzione $f(x) = e^{\left(\frac{x+5}{3x-2}\right)}$ e tracciarne un grafico approssimativo.

Risoluzione

Dominio : $\left(-\infty, \frac{2}{3}\right) \cup \left(\frac{2}{3}, +\infty\right)$

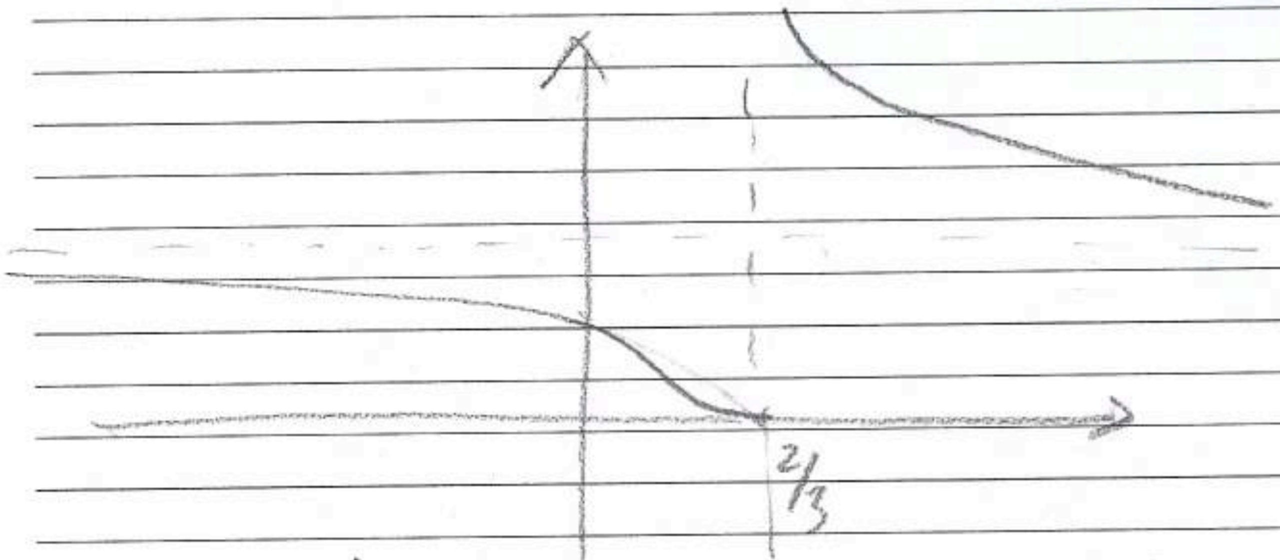
$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \sqrt[3]{e}$ asintoto orizz.

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \sqrt[3]{e}$ asint. orizz.

$\lim_{x \to \left(\frac{2}{3}\right)^-} f(x) = 0$

$\lim_{x \to \left(\frac{2}{3}\right)^+} f(x) = +\infty$ asint. verticale

$f'(x) = e^{\frac{x+5}{3x-2}} \frac{-17}{(3x-2)^2} < 0 \quad \forall x$



$\lim_{x \to \left(\frac{2}{3}\right)^-} f'(x) = 0$