Analisi Matematica 1. Durata della prova: 2 ore 12.9.17

Firma: ....

Cognome .... **Nome** .... **A.A.** ....

Matricola .... **Corso di Laurea** ....

D1	
D2	
E1	
E2	
E3	
E4	
E5	
Σ	

Domanda 1

[4 punti]

(i) Dare la definizione di limite $\lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty$.

(ii) Dare un esempio di una successione a_n tale che $\lim_{n\to+\infty} a_n = 3$.

Risposta

(i)

$\rightarrow$ appunti

(ii) p.e. $\left(\frac{3n}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$

Domanda 2

[4 punti]

(i) Enunciare il teorema di Lagrange (chiamato anche teorema del valor medio).

(ii) Trovare un punto c del teorema di Lagrange per la funzione $f(x) = x^2 + x + 7$ nell'intervallo $[1,3]$.

Risposta

(i)

$\rightarrow$ appunti

(ii) $\left.\begin{array}{l} f(a) = f(1) = 1^2 + 1 + 7 = 9 \\ f(b) = f(3) = 3^2 + 3 + 7 = 19 \end{array}\right\} \Rightarrow f(b) - f(a) = 10$

$f'(x) = 2x+1$. Quindi $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

$\Leftrightarrow \frac{10}{\underset{\underset{5}{\shortparallel}}{3-1}} = 2c+1 \Leftrightarrow \underline{\underline{c=2}}$

Esercizio 1

[5 punti]

Studiare il carattere della serie

$$S := \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3+n^4}{111+n^2+n^5} =: a_n$$

Risoluzione

- $a_n \sim \frac{n^4}{n^5} = \frac{1}{n}$ per $n \to +\infty$
- $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ diverge a $+\infty$

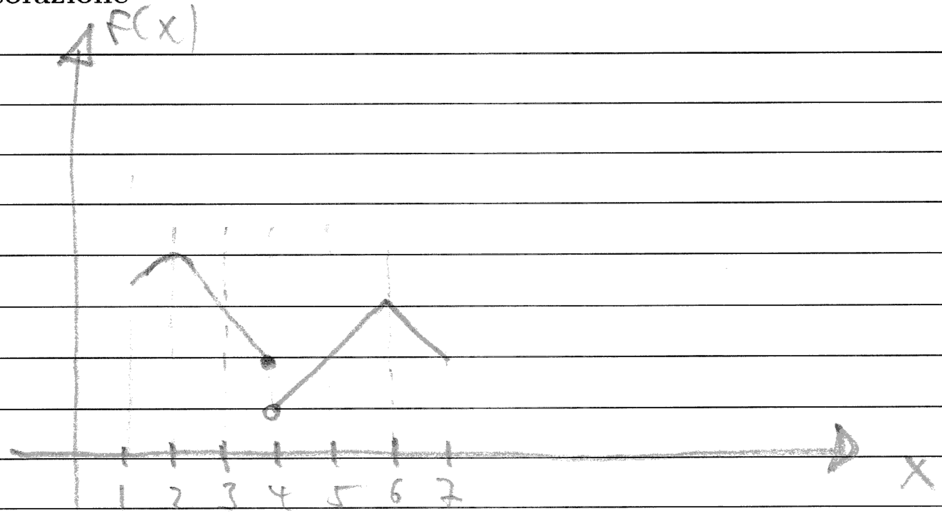
$\Rightarrow$ (per il criterio del confronto asintotico) la serie S diverge a $+\infty$.

Esercizio 2

[5 punti]

Disegnare il grafico di una funzione $f : [1, 7] \to \mathbb{R}$ con $f'(2) = 0$, $f'(3) = -1$, non continua in $x = 4$, con $f'(5) = 1$, con un punto angoloso in $x = 6$.

Risoluzione



Esercizio 3 [5 punti]

Trovare il piano tangente in $(1,2)$ $= (x_0, y_0)$ alla funzione $f(x,y) = 7 + x^4 y$.

Risoluzione

- $p(x,y) = f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)\cdot(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)\cdot(y-y_0)$
- $f(x_0,y_0) = 7 + 1^4\cdot 2 = 9$
- $f_x(x,y) = 4x^3\cdot y \Rightarrow f_x(x_0,y_0) = 4\cdot 1^3\cdot 2 = 8$
- $f_y(x,y) = x^4 \Rightarrow f_y(x_0,y_0) = 1^4 = 1$

Quindi $p(x,y) = 9 + 8\cdot(x-1) + 1\cdot(y-2)$

Esercizio 4 [4 punti]

Studiare il limite

$$\ell := \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{[\ln(1+x^2)]^3 y^2}{x^8+y^8}$$

Risoluzione

Poniamo $y = mx$ per $m \in \mathbb{R}$. Così risulta

$\ln(1+x^2) \sim x^2$ per $x \to 0$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x^2)^3 \cdot m^2 \cdot x^2}{x^8 + m^8\cdot x^8} = \lim_{x\to 0} \frac{x^{2\cdot 3}\cdot m^2\cdot x^2}{x^8\cdot(1+m^8)} \to \frac{m^2}{1+m^8}$$

$$= \frac{m^2}{1+m^8}$$

Quindi il limite dipende da m

$\Rightarrow \ell$ non esiste.

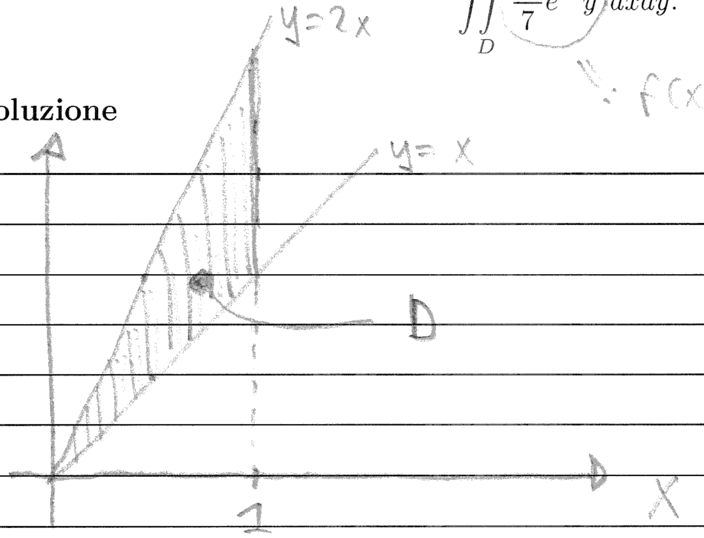
Esercizio 5

[5 punti]

Disegnare l'insieme $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 1, \quad x \le y \le 2x\}$. Calcolare l'integrale

$$\iint_D \underbrace{\frac{12}{7} e^{x^4} y^2}_{=\, f(x,y)}\, dxdy. \quad =: I$$

Risoluzione



D è y-semplice e f(x, y) è continua.

Quindi per Fubini-Tonelli vale

$$I = \int_{x=0}^{1} \int_{y=x}^{2x} \frac{12}{7} e^{x^4} \cdot y^2 \, dy \, dx$$

$$= \int_0^1 \frac{\cancel{12}^{\,4}}{7} e^{x^4} \cdot \left[\frac{y^3}{\cancel{3}_{\,1}} \right]_{y=x}^{2x} dx$$

$$= \int_0^1 \frac{4}{\cancel{7}_{\,1}} e^{x^4} \cdot \underbrace{\left(2^3 \cdot x^3 - x^3 \right)}_{= \cancel{7}^{\,1} x^3} dx$$

$$= \int_0^1 \underbrace{e^{x^4} \cdot 4x^3}_{= \left(e^{x^4}\right)'} dx = \left[e^{x^4} \right]_0^1$$

$$= e^{1^4} - e^{0^4}$$

$$= \underline{\underline{e - 1}}$$