

Cognome Nome A.A.

Matricola Corso di Laurea

Domanda 1

[4 punti]

D1	
D2	
E1	
E2	
E3	
E4	
E5	
Σ	

(i) Dare la definizione di $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = -\infty$.

(ii) Dare un esempio di successione a_n per cui $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 18$.

Risposta

(i) $\forall \epsilon < 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ t.c. } a_n \leq M \forall n \geq n_0$

(ii) $a_n = 18 + \frac{1}{n+1} \rightarrow 18 \text{ per } n \rightarrow +\infty$

Domanda 2

[4 punti]

(i) Enunciare il teorema di Rolle.

(ii) Trovare un punto c del teorema di Rolle per $f(x) = x^2 - 4x + 7$ nell'intervallo $[1, 3]$.

Risposta

(i) Se $f \in C[a, b]$ è derivabile in (a, b) e $f(a) = f(b)$

allora $\exists c \in (a, b)$ t.c. $f'(c) = 0$

(ii) • f è continua in $[1, 3]$ e derivabile in $(1, 3)$ ✓

• $f(1) = 1^2 - 4 \cdot 1 + 7 = 1 - 4 + 7 = 4$, $f(3) = 3^2 - 4 \cdot 3 + 7 = 9 - 12 + 7 = 4 = f(1)$ ✓

• $f'(x) = 2x - 4 \stackrel{!}{=} 0 \Leftrightarrow 2x = 4 \Leftrightarrow x = 2$

$\Rightarrow c = 2 \in (1, 3)$

Esercizio 1

[5 punti]

Studiare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{12 + n^{11}}{151 + n^3 + n^{12}} =: a_n$$

Risoluzione

$$\bullet a_n \sim \frac{n^{11}}{n^{12}} = \frac{1}{n} \quad \text{per } n \rightarrow +\infty$$

$$\bullet \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = +\infty$$

\Rightarrow (per il teorema del confronto asintotico)

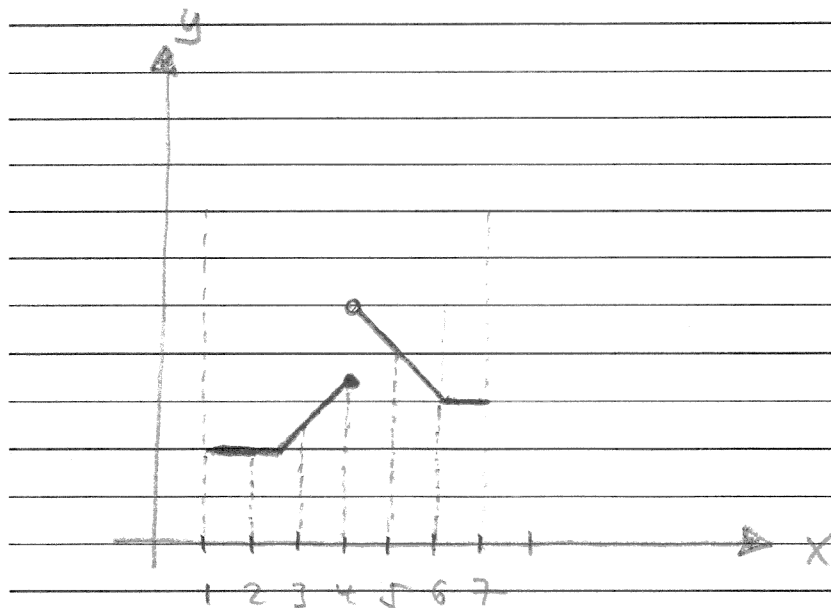
$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = +\infty$, cioè la serie data
diverge a $+\infty$

Esercizio 2

[5 punti]

Disegnare il grafico di una funzione $f: [1, 7] \rightarrow \mathbb{R}$ con $f'(2) = 0$, $f'(3) = 1$, non continua in $x = 4$, con $f'(5) = -1$ e con un punto angoloso in $x = 6$.

Risoluzione



Esercizio 3

[5 punti]

Trovare il piano tangente in $(1, 3)$ relativo alla funzione $f(x, y) = 7 + x^4 y^2$.

Risoluzione

$$\bullet P(x, y) = f(1, 3) + f_x(1, 3)(x-1) + f_y(1, 3)(y-3)$$

$$\bullet f(1, 3) = 7 + 1^4 \cdot 3^2 = 7 + 9 = 16$$

$$\bullet f_x(x, y) = 4 \cdot x^3 \cdot y^2 \Rightarrow f_x(1, 3) = 4 \cdot 1^3 \cdot 3^2 = 36$$

$$\bullet f_y(x, y) = 2 \cdot x^4 \cdot y \Rightarrow f_y(1, 3) = 2 \cdot 1^4 \cdot 3 = 6$$

$$\Rightarrow P(x, y) = 16 + 36 \cdot (x-1) + 6 \cdot (y-3)$$

Esercizio 4

[4 punti]

Studiare il limite

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{y^8 \cdot [\sin(x)]^4}{x^{12} + y^{12}} =: f(x, y)$$

Risoluzione

Ponendo $y = m \cdot x$ per $m \in \mathbb{R}$ si ottiene

$$\frac{m^8 \cdot x^8 \cdot \sin^4(x)}{x^{12} + m^{12} \cdot x^{12}} \sim \frac{m^8 \cdot x^8 \cdot x^4}{(1 + m^{12}) \cdot x^{12}} = \frac{m^8}{1 + m^{12}} \quad \text{per } x \rightarrow 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x, m \cdot x) = \frac{m^8}{1 + m^{12}} \quad \text{dipende da } m \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) \quad \text{non esiste.}$$

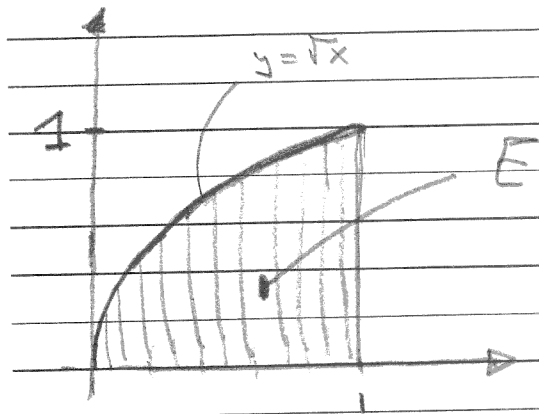
Esercizio 5

[5 punti]

Disegnare l'insieme $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \sqrt{x}\}$. Calcolare l'integrale

$$I = \iint_E 18x^7 y \, dx \, dy =: f(x, y)$$

Risoluzione



• Il dominio E è y -semplice
e f è continua.

Quindi per il teorema di Fubini-Tonelli

segue:

$$I = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{x}} 18x^7 \cdot y \, dy \, dx$$

$$= \int_0^1 18 \cdot x^7 \cdot \left. \frac{y^2}{2} \right|_0^{\sqrt{x}} dx$$

$$= \int_0^1 9 \cdot x^7 (x - 0) dx$$

$$= \int_0^1 9 \cdot x^8 dx = \frac{9}{9} \cdot x^9 \Big|_0^1$$

$$= 1^9 - 0^9 = \underline{\underline{1}}$$