Analisi Matematica 1, Scritto 1-A. Durata della prova: 2 ore 13.2.15

Firma: ....

Cognome .... Nome .... A.A. ....

Matricola .... Corso di Laurea ....

D1	
D2	
E1	
E2	
E3	
E4	
E5	
Σ	

Domanda 1

[4 punti]

(i) Dare la definizione di $\lim_{x\to 7} f(x) = 3$.

(ii) Scrivere una successione a_n tale che $\lim_{n\to+\infty} a_n = -6$.

Risposta

(i) $\forall$ successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \underbrace{X}_{\text{dominio di } f} \setminus \{7\}$ con $\lim_{n\to+\infty} x_n = 7$

segue $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = 3$

(Def. alternativa $\to$ compito B)

(ii)

p.e. $a_n = \frac{1}{n} - 6$ converge a $l = -6$

Domanda 2

[4 punti]

(i) Enunciare il teorema di Lagrange (o del valor medio).

(ii) Trovare il punto c del teorema di Lagrange per la funzione $f : [3,5] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 4x + 11$.

Risposta

(i) Sia $f \in C[a,b]$ derivabile in (a,b).

Allora $\exists\, c \in (a,b)$ t.c.

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}$$

(ii) $\left.\begin{matrix} f(3) = 8 \\ f(5) = 16 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \frac{f(5) - f(3)}{5-3} = \frac{8}{2} = 4$

$f'(x) = 2x - 4 \overset{!}{=} 4 \Rightarrow x = \underline{\underline{c = 4}}$

Esercizio 1

[5 punti]

Studiare il carattere della serie

$$S := \sum_{n=1}^{+\infty} \sin\left(1 - \cos\left(\frac{5+n^4\sqrt{2}}{9+n^4\sqrt{n}}\right)\right) =: a_n$$

Risoluzione

- $\dfrac{5+n^4\sqrt{2}}{9+n^4\sqrt{n}} \sim \dfrac{\cancel{n^4}\cdot\sqrt{2}}{\cancel{n^4}\cdot\sqrt{n}} = \sqrt{\dfrac{2}{n}} \to 0$ per $n \to +\infty$

- $1-\cos(x) \sim \dfrac{x^2}{2}$ per $x \to 0$ $\Rightarrow$

$$1 - \cos\Bigg(\underbrace{\frac{5+n^4\sqrt{2}}{9+n^4\sqrt{n}}}_{=x\to 0 \text{ per } n\to+\infty}\Bigg) \sim \frac{\left(\frac{5+n^4\sqrt{2}}{9+n^4\sqrt{n}}\right)^2}{2} \sim \left(\sqrt{\frac{2}{n}}\right)^2 / 2 = \frac{1}{n}$$

per $n \to +\infty$

- $\sin(t) \sim t$ per $t \to 0$ $\Rightarrow$

$$\sin\left(1-\cos\left(\frac{5+n^4\sqrt{2}}{9+n^4\sqrt{n}}\right)\right) \sim \frac{1}{n} \quad \text{per } n\to+\infty$$

Quindi $a_n \sim \frac{1}{n}$ per $n \to +\infty$. Inoltre $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ diverge a $+\infty$
$\Rightarrow$ S diverge a $+\infty$.
(criterio del confronto asintotico)

Esercizio 2

[4 punti]

Studiare la convergenza o la divergenza del seguente integrale improprio. Nel caso in cui converga, calcolarne il valore

$$I := \int_3^4 \frac{1}{\sqrt{x-3}}\,dx$$

Risoluzione

$$I = \lim_{c\to 3^+} \int_c^4 (x-3)^{-1/2}\,dx = \lim_{c\to 3^+} \left.\frac{(x-3)^{1/2}}{1/2}\right|_c^4$$

$$= \lim_{c\to 3^+} 2\Big[1^{1/2} - \underbrace{(c-3)^{1/2}}_{\to 0}\Big] = 2$$

Esercizio 3

[5 punti]

Trovare il piano tangente in $(2,1)$ alla funzione $f(x,y) = xy^4 - 5$.

Risoluzione

- $p(x,y) = f(2,1) + f_x(2,1)(x-2) + f_y(2,1)(y-1)$
- $f(2,1) = -3$
- $f_x(x,y) = y^4 \Rightarrow f_x(2,1) = 1$
- $f_y(x,y) = 4xy^3 \Rightarrow f_y(2,1) = 8$

Quindi $p(x,y) = -3 + (x-2) + 8(y-1)$

$= x + 8y - 13$

Esercizio 4

[5 punti]

Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{5\ln(1+x^2y^2)}{x^4+y^4} =: f(x,y).$$

Risoluzione

Poniamo $y = mx$. $\Rightarrow$ $\to 0$ per $x \to 0$ e $\ln(1+t) \sim t$ per $t \to 0$

$$f(x,mx) = \frac{5\ln(1+m^2x^4)}{(1+m^4)x^4}$$

$$\sim \frac{5\cdot m^2 \cancel{x^4}}{(1+m^4)\cancel{x^4}} = 5\frac{m^2}{1+m^4}$$ dipende da $m \in \mathbb{R}$

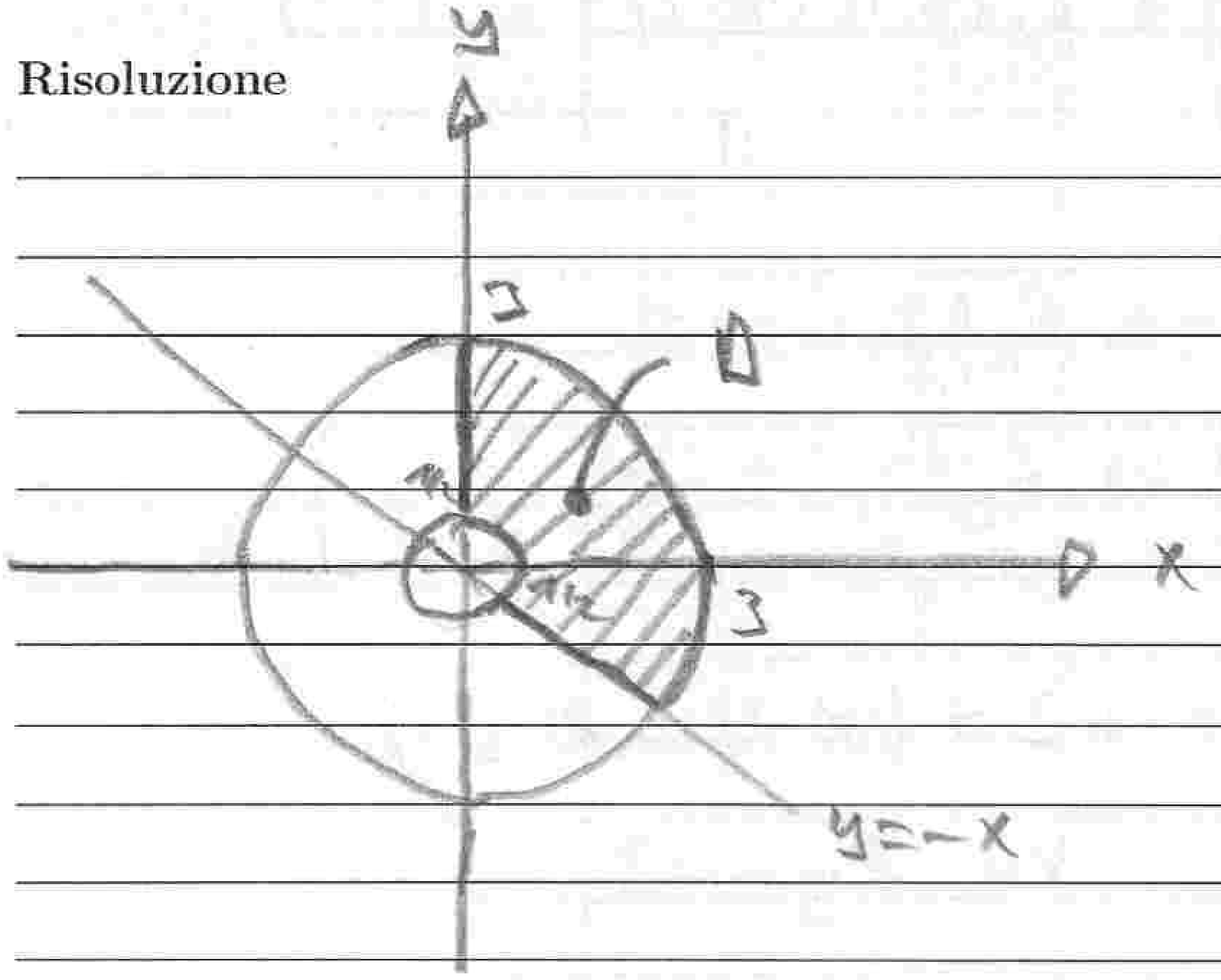
$\Rightarrow \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ <u>non</u> esiste.

Esercizio 5 [5 punti]

Disegnare l'insieme $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{4} \le x^2+y^2 \le 9,\ x \ge 0,\ -x \le y\}$. Calcolare l'integrale

$$I := \iint_D \frac{6(y+x)}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Risoluzione



D corrisponde a $D' = \{(\varrho, \vartheta) \mid \varrho \in [\frac{1}{2}, 3],\ \vartheta \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]\}$ in coord. polari.

Quindi:

$$I = \int_{\varrho=\frac{1}{2}}^{3} \int_{\vartheta=-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{6(\varrho \cdot \sin(\vartheta) + \varrho \cdot \cos(\vartheta))}{\cancel{\varrho}} \cdot \cancel{\varrho}\, d\vartheta\, d\varrho$$

$$= 6 \cdot \int_{1/2}^{3} \varrho\, d\varrho \cdot \int_{-\pi/4}^{\pi/2} \sin(\vartheta) + \cos(\vartheta)\, d\vartheta$$

$$= \overset{3}{\cancel{6}} \cdot \left(\frac{\varrho^2}{\cancel{2}} \Big|_{1/2}^{3} \right) \cdot \left(\Big[-\cos(\vartheta) + \sin(\vartheta) \Big]_{-\pi/4}^{\pi/2} \right)$$

$$= 3 \cdot \left(9 - \frac{1}{4} \right) \cdot \left(-\overbrace{\cos(\pi/2)}^{=0} + \overbrace{\sin(\pi/2)}^{=1} + \overbrace{\cos(-\pi/4)}^{=\frac{\sqrt{2}}{2}} - \overbrace{\sin(-\tfrac{\pi}{4})}^{-\frac{\sqrt{2}}{2}} \right)$$

$$= 3 \cdot \frac{35}{4} \cdot \left(1 + \sqrt{2} \right) = \frac{105}{4} \left(1 + \sqrt{2} \right)$$