Analisi Matematica 1, Scritto 1-B. Durata della prova: 2 ore 13.2.15

Firma: ....

Cognome .... Nome .... A.A. ....

Matricola .... Corso di Laurea ....

D1	
D2	
E1	
E2	
E3	
E4	
E5	
Σ	

Domanda 1

[4 punti]

(i) Dare la definizione di $\lim_{x\to 5} f(x) = 9$.

(ii) Scrivere una successione a_n tale che $\lim_{n\to+\infty} a_n = -4$.

Risposta

(i) $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ t.c. $\forall x \in X$ (= dominio di f)

con $0 < |x-5| < \delta$ segue $|f(x) - 9| < \varepsilon$.

(ii) p.e. $a_n = -4 + \frac{1}{n}$ converge a -4.

Domanda 2

[4 punti]

(i) Enunciare il teorema di Lagrange (o del valor medio).

(ii) Trovare il punto c del teorema di Lagrange per la funzione $f : [2,4] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 6x + 13$.

Risposta

(i)

cfr. compito A

(ii) $\left.\begin{matrix} f(2) = 5 \\ f(4) = 5 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \frac{f(5)-f(2)}{5-2} = 0$

$f'(x) = 2x - 6 \overset{!}{=} 0 \Rightarrow x = \underline{\underline{c = 3}}$

Esercizio 1

[5 punti]

Studiare il carattere della serie

$$S := \sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{\left(1-\cos\left(\sin\left(\frac{3+n^2\sqrt{2}}{7+n^2\sqrt{n}}\right)\right)\right)}_{} =: a_n$$

Risoluzione

- $\dfrac{3+n^2\sqrt{2}}{7+n^2\sqrt{n}} \sim \dfrac{n^2\sqrt{2}}{n^2\sqrt{n}} = \sqrt{2/n} \to 0$ per $n \to +\infty$

- $\sin(x) \sim x$ per $x \to 0 \Rightarrow$

  $\sin\left(\dfrac{3+n^2\sqrt{2}}{7+n^2\sqrt{n}}\right) \sim \sqrt{2/n}$ per $n \to +\infty$

- $1-\cos(t) \sim t^2/2$ per $t \to 0 \Rightarrow$

  $1-\cos\left(\sin\left(\dfrac{3+n^2\sqrt{2}}{7+n^2\sqrt{n}}\right)\right) \sim \dfrac{\left(\sqrt{2/n}\right)^2}{2} = \dfrac{1}{n}$ per $n \to +\infty$

Quindi $a_n \sim \frac{1}{n}$ per $n \to +\infty$.

Inoltre $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ diverge a $+\infty$ $\Rightarrow$ S diverge a $+\infty$.

(criterio del confronto asintotico)

Esercizio 2

[4 punti]

Studiare la convergenza o la divergenza del seguente integrale improprio. Nel caso in cui converga, calcolarne il valore

$$I := \int_7^8 \frac{1}{\sqrt{x-7}}\,dx$$

Risoluzione

$$I = \lim_{c \to 7^+} \int_c^8 (x-7)^{-1/2}\,dx = \lim_{c \to 7^+} \left.\frac{(x-7)^{1/2}}{1/2}\right|_c^8$$

$$= \lim_{c \to 7^+} 2\left[1^{1/2} - \underbrace{(c-7)^{1/2}}_{\to 0}\right] = 2$$

Esercizio 3

[5 punti]

Trovare il piano tangente in $(1,2)$ alla funzione $f(x,y) = x^4 y - 7$.

Risoluzione

- $p(x,y) = f(1,2) + f_x(1,2)(x-1) + f_y(1,2)(y-2)$
- $f(1,2) = -5$
- $f_x(x,y) = 4x^3 y \Rightarrow f_x(1,2) = 8$
- $f_y(x,y) = x^4 \Rightarrow f_y(1,2) = 1$

$\Rightarrow p(x,y) = -5 + 8(x-1) + (y-2)$

$= 8x + y - 15$

Esercizio 4

[5 punti]

Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{7\ln(1+x^4y^4)}{x^8+y^8} =: f(x,y)$$

Risoluzione

Poniamo $y = mx$. $\Rightarrow$ $\to 0$ per $x \to 0$ e $\ln(1+t) \sim t$ per $t \to 0$

$f(x, mx) = \dfrac{7\ln(1 + m^4 \cdot x^8)}{(1+m^8)x^8} \sim 7 \dfrac{m^4 x^8}{(1+m^8)x^8}$

$= 7 \dfrac{m^4}{1+m^8}$ dipende da $m \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ non esiste.

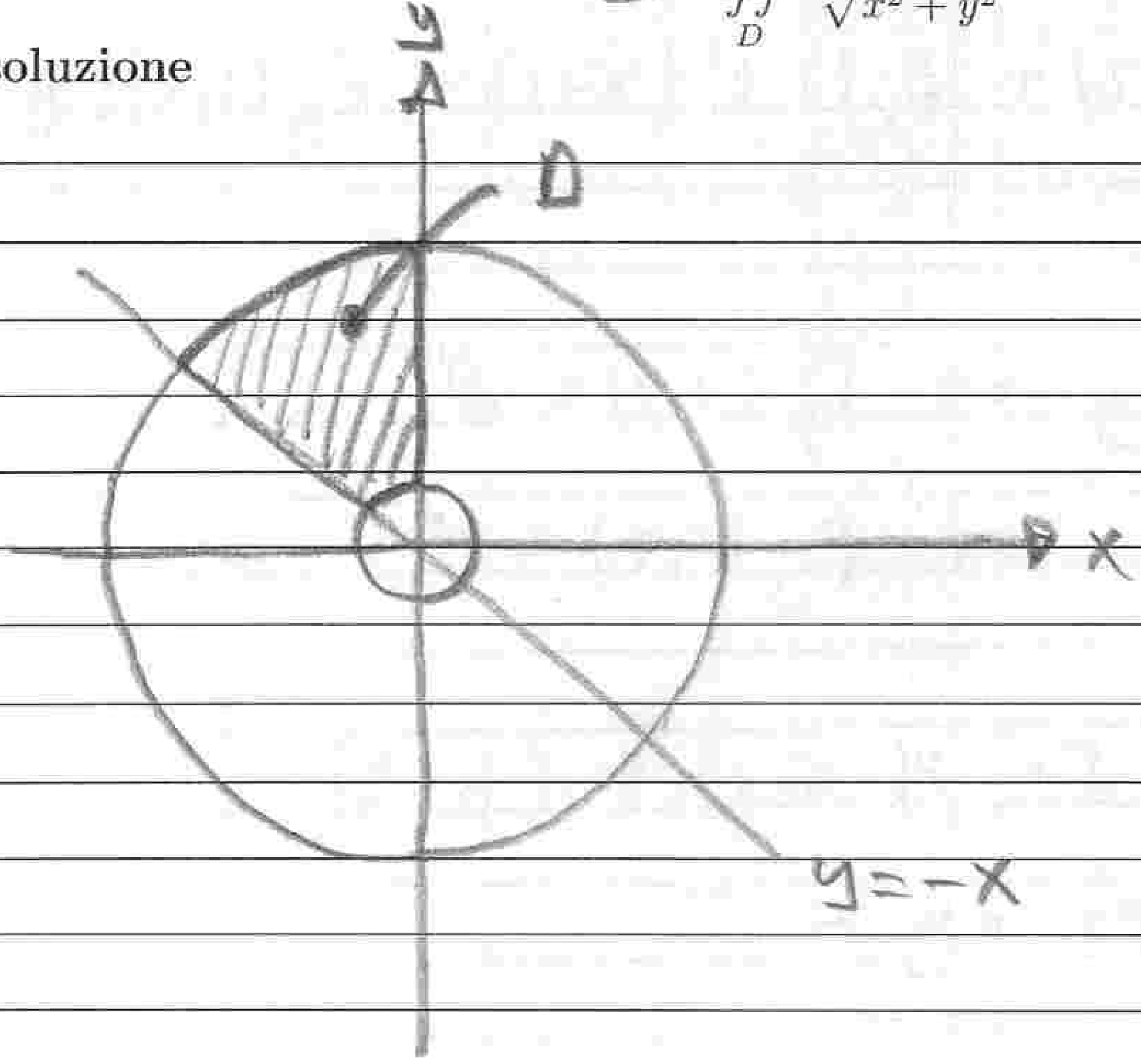
Esercizio 5

[5 punti]

Disegnare l'insieme $D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{9} \leq x^2 + y^2 \leq 4,\ x \leq 0,\ -x \leq y\right\}$. Calcolare l'integrale

$$I := \iint_D \frac{4(y+x)}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Risoluzione



D corrisponde a $D' = \left\{(\rho, \vartheta) \mid \rho \in \left[\frac{1}{3}, 2\right], \vartheta \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3}{4}\pi\right]\right\}$

in coordinate polari.

Quindi:

$$I = 4 \cdot \int_{\rho=\frac{1}{3}}^{2} \int_{\vartheta=\pi/2}^{3/4\pi} \frac{\rho \cdot \sin(\vartheta) + \rho \cdot \cos(\vartheta)}{\cancel{\rho}} \cdot \cancel{\rho}\, d\vartheta\, d\rho$$

$$= 4 \cdot \int_{1/3}^{2} \rho\, d\rho \cdot \int_{\pi/2}^{3/4\pi} \sin(\vartheta) + \cos(\vartheta)\, d\vartheta$$

$$= 4 \cdot \left[\frac{\rho^2}{2}\right]_{1/3}^{2} \cdot \left[-\cos(\vartheta) + \sin(\vartheta)\right]_{\pi/2}^{3/4\pi}$$

$$= 2 \cdot \left[4 - \frac{1}{9}\right] \cdot \left[\overbrace{-\cos(3/4\pi)}^{=-\frac{\sqrt{2}}{2}} + \overbrace{\cos(\pi/2)}^{=0} + \overbrace{\sin(3/4\pi)}^{=\frac{\sqrt{2}}{2}} - \overbrace{\sin(\pi/2)}^{=1}\right]$$

$$= 2 \cdot \frac{35}{9} \cdot \left(\sqrt{2} - 1\right) = \underline{\frac{70}{9} \cdot \left(\sqrt{2} - 1\right)}$$