Istituzioni di Matematiche 1° Modulo $\boxed{6\,\text{CFU}}$ Durata: 90 min. 13.2.15

Firma: ....

Cognome .... Nome .... A.A. ....

Matricola .... Corso di Laurea ....

Domanda 1

[5 punti]

D1	
D2	
E1	
E2	
E3	
E4	
Σ	

(i) Dare la definizione di $\lim_{x\to 5} f(x) = 9$.

(ii) Scrivere una successione a_n tale che $\lim_{n\to+\infty} a_n = -4$.

Risposta

(i) ______________________________

cfr. compito B 9 CFU

(ii) ______________________________

Domanda 2

[5 punti]

(i) Enunciare il teorema di Lagrange (o del valor medio).

(ii) Trovare il punto c del teorema di Lagrange per la funzione $f : [2,4] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 6x + 13$.

Risposta

(i) ______________________________

— || —

(ii) ______________________________

Esercizio 1

[5 punti]

Studiare il carattere della serie

$$S := \sum_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \cos\left(\frac{3+n^2\sqrt{2}}{7+n^2\sqrt{n}}\right)\right)$$

Risoluzione

- $\frac{3+n^2\sqrt{2}}{7+n^2\sqrt{n}} \sim \frac{n^2\sqrt{2}}{n^2\sqrt{n}} = \sqrt{2/n}$ per $n \to +\infty$

- $1-\cos(x) \sim \frac{x^2}{2}$ per $x \to 0$ $\Rightarrow$

$1-\cos\left(\frac{3+n^2\sqrt{2}}{7+n^2\sqrt{n}}\right) \sim \frac{(\sqrt{2/n})^2}{2} = \frac{1}{n}$ per $n \to +\infty$

Inoltre $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ diverge a $+\infty$

$\Rightarrow$ (per il criterio del confronto asintotico)

S diverge a $+\infty$

Esercizio 2

[6 punti]

Studiare la convergenza o la divergenza del seguente integrale improprio. Nel caso in cui converga, calcolarne il valore

$$\int_7^8 \frac{1}{\sqrt{x-7}}\,dx$$

Risoluzione

Cfr. Compito B 9 CFU

Esercizio 3

[5 punti]

Trovare la retta tangente in $x_0 = -1$ alla funzione $f(x) = \frac{x}{x-1}$.

Risoluzione

- $t(x) = f(-1) + f'(-1)(x+1)$
- $f(-1) = \frac{-1}{-1-1} = \frac{1}{2}$
- $f'(x) = \frac{(x-1)\cdot 1 - 1\cdot x}{(x-1)^2} = \frac{-1}{(x-1)^2} \Rightarrow$

$f'(-1) = -\frac{1}{4}$

$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}(x+1) = \frac{1}{4} - \frac{x}{4}$

Soluzione alternativa con l'Hopital:

$\sin(x^4) \sim x^4$ per $x \to 0 \Rightarrow$

$$l = \lim_{x\to 0} \frac{x^4}{x^2+\ln(1-x^2)} \left(= \frac{0}{0}\right) \overset{(H)}{=} \lim_{x\to 0} \frac{4x^3}{2x + \frac{-2x}{1-x^2}}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{4x^3}{\frac{2x-2x^3-2x}{1-x^2}} = \lim_{x\to 0} \frac{4x^3(1-x^2)}{-2x^3} = -\frac{4}{2} = -2$$

Esercizio 4

[6 punti]

Calcolare, se esiste, il limite

$$l := \lim_{x\to 0} \frac{\sin^4(x)}{x^2+\ln(1-x^2)}$$

Risoluzione

- $\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + o(t^2) \Rightarrow$

$\ln(1-x^2) = -x^2 - \frac{x^4}{2} + o(x^4) \Rightarrow$

$x^2 + \ln(1-x^2) = x^2 - x^2 - \frac{x^4}{2} + o(x^4) \Rightarrow$

$x^2 + \ln(1-x^2) \sim -\frac{x^4}{2}$ per $x \to 0$

- $\sin(x) \sim x$ per $x \to 0 \Rightarrow$

$\sin^4(x) \sim x^4$ per $x \to 0$ -

$$\Rightarrow \frac{\sin^4(x)}{x^2+\ln(1-x^2)} \sim \frac{x^4}{-\frac{x^4}{2}} = -2$$

$\Rightarrow \underline{\underline{l = -2}}$