**Analisi Matematica 1, Scritto 1-A. Durata della prova: 2 ore** **13.6.22**

**Cognome** .............................. **Nome** .................................. **A.A.** .........

**Matricola** ..................................... **Corso di Laurea** ..............................

| | |
|---|---|
| D1 | |
| D2 | |
| E1 | |
| E2 | |
| E3 | |
| E4 | |
| E5 | |
| $\Sigma$ | |

## Domanda 1

**[4 punti]**

(i) Dare la definizione di derivata $f'(x_0)$ per una funzione $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in (a, b)$.

(ii) Calcolare l'equazione della retta tangente $t$ di $f(x) = \ln(\frac{1+x}{x})$ nel punto $x_0 = 1$.

**Risposta**

(i) $f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$

$\left( \text{oppure } \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right)$

(ii) • $t(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$

• $f(x_0) = \ln\left(\frac{1+1}{1}\right) = \ln(2)$

• $\ln\left(\frac{1+x}{x}\right) = \ln(1+x) - \ln(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{1+x} \cdot 1 + \frac{1}{x}$

$\Rightarrow f'(x_0) = \frac{1}{1+1} - 1 = -\frac{1}{2}$

$\Rightarrow \underline{\underline{t(x) = \ln(2) - \frac{1}{2}(x-1)}}$

## Domanda 2

**[4 punti]**

(i) Enunciare il teorema degli zeri.

(ii) Verificare che la funzione $f(x) = x^5 - 5x + 1$ ammette uno zero nel intervallo $[0, 1]$.

**Risposta**

(i) Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ e continua e $f(a) \cdot f(b) < 0$, allora $\exists\, c \in (a,b)$ t.c. $f(c) = 0$.

(ii) • $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ è continua

• $f(0) = 1 > 0$, $f(1) = 1 - 5 \cdot 1 + 1 = -3 < 0$

$\Rightarrow \exists\, c \in (0,1)$ con $f(c) = 0$.

## Esercizio 1

[4 punti]

Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{9n^4-2n^3+1}-3n^2}{n} =: a_n$$

### Risoluzione

$$a_n = \frac{\sqrt{9n^4-2n^3+1}-3n^2}{n} \cdot \frac{\sqrt{9n^4-2n^3+1}+3n^2}{\sqrt{9n^4-2n^3+1}+3n^2}$$

$(a-b)\cdot(a+b) = a^2+b^2$

$$= \frac{\cancel{9n^4}-2n^3+1-\cancel{9n^4}}{n\cdot 3n^2\cdot\left(\sqrt{1-\frac{2}{9n}+\frac{1}{9n^4}}+1\right)}$$

$$= \frac{-2+\frac{1}{n^3}}{3\cdot\left(\sqrt{1-\frac{2}{9n}+\frac{1}{9n^4}}+1\right)} \to \frac{-2+0}{3\cdot 2} = -\frac{1}{3}$$

$\frac{1}{n^3} \to 0$

$\sqrt{1-\frac{2}{9n}+\frac{1}{9n^4}} + 1 \to \sqrt{1}+1 = 2$

per $n \to +\infty$

## Esercizio 2

[4 punti]

Calcolare il polinomio di Maclaurin di ordine 4 della funzione $f(x) = e^{x^2+\ln(2)} - x\cdot\sin(x)$.

### Risoluzione

- $e^{x^2+\ln(2)} = e^{\ln(2)}\cdot e^{x^2} = 2\cdot e^{x^2}$
- $e^t = 1+t+\frac{t^2}{2}+o(t^2)$ per $t\to 0$ $\Rightarrow$ $(t = x^2)$

  $2e^{x^2} = 2+2\cdot x^2+x^4+o(x^4)$ per $x\to 0$
- $\sin(x) = x-\frac{x^3}{6}+o(x^4)$ per $x\to 0$ $\Rightarrow$

  $x\cdot\sin(x) = x^2-\frac{x^4}{6}+o(x^5) = x^2-\frac{x^4}{6}+o(x^4)$ per $x\to 0$

$\Rightarrow$ $f(x) = 2+2\cdot x^2+x^4-x^2+\frac{x^4}{6}+o(x^4)$

$= 2+x^2+\frac{7}{6}x^4+o(x^4)$ per $x\to 0$

$\Rightarrow$ $T_4(x) = 2+x^2+\frac{7}{6}\cdot x^4$

## Esercizio 3

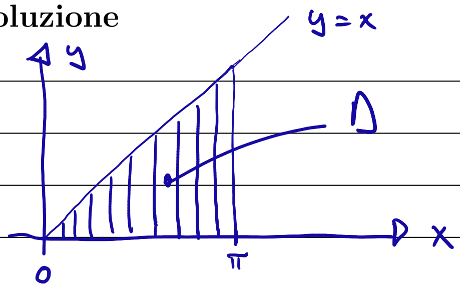
**[6 punti]**

Disegnare il dominio $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le \pi,\ 0 \le y \le x\}$ e calcolare l'integrale doppio

$$I := \iint_D \cos(x)\, dx\, dy$$

$$\cos(x) =: f(x,y)$$

### Risoluzione




D è y-semplice e f è continua, quindi per il teorema di Fubini-Tonelli segue:

$$I = \int_{x=0}^{\pi} \int_{y=0}^{x} \cos(x)\, dy\, dx = \int_{x=0}^{\pi} \cos(x) \cdot [y]_{y=0}^{x}\, dx$$

$$= \int_0^{\pi} \underset{f}{x} \cdot \underset{g'}{\cos(x)}\, dx = \underset{f}{x} \cdot \underset{g}{\sin(x)}\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \underset{f'}{1} \cdot \underset{g}{\sin(x)}\, dx$$

$$= \pi \cdot \underbrace{\sin(\pi)}_{=0} - 0 \cdot \sin(0) + \cos(x)\Big|_0^{\pi} = \cos(\pi) - \cos(0)$$

$$= -1 - 1 = -2$$

## Esercizio 4

**[4 punti]**

Studiare la convergenza del limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{x^2} - e^{y^2}}{x^2 + y^2} =: f(x,y)$$

### Risoluzione

- $y = 0$: $\lim_{x \to 0} f(x,0) = \lim_{x \to 0} \frac{e^{x^2} - e^{0^2}}{x^2 + 0^2} =$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{e^{x^2} - 1}{x^2} = 1$$

- $x = 0$: $\lim_{y \to 0} f(0,y) = \lim_{y \to 0} \frac{e^{0^2} - e^{y^2}}{0^2 + y^2} =$

$$= -\lim_{y \to 0} \frac{e^{y^2} - 1}{y^2} = -1$$

$$1 \neq -1$$

$\Rightarrow$ il limite non esiste.

## Esercizio 5

**[6 punti]**

Trovare il dominio, eventuali zeri, asintoti e punti di estremo locale della funzione $f(x) = \dfrac{x+2}{x^2+5}$ e tracciarne un grafico approssimativo.

### Risoluzione

Dominio: tutto $\mathbb{R}$

Zeri: $f(x) = 0 \iff x + 2 = 0 \iff x = -2$.
Quindi $x_0 = -2$ è l'unico zero di $f$

Asintoti: $$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\cancel{x}^{\,1}\left(1 + \frac{2}{x}\right)}{x^{\cancel{2}}\left(1 + \frac{5}{x^2}\right)} = \frac{1+0}{\pm\infty(1+0)} = 0$$

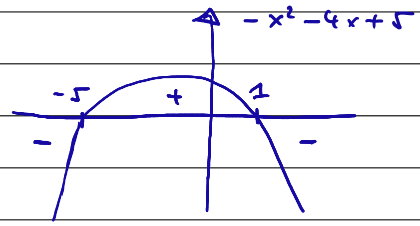
$\Rightarrow$ $y = 0$ è un asintoto orizzontale per $x \to \pm\infty$.

Estremi locali: $$f'(x) = \frac{(x^2+5)\cdot 1 - 2x\cdot(x+2)}{(x^2+5)^2} = \frac{x^2+5-2x^2-4x}{(x^2+5)^2}$$

$$= \frac{-x^2-4x+5}{(x^2+5)^2} \qquad (x^2+5)^2 > 0 \text{ sempre} \qquad \Rightarrow f'(x) = 0$$

$$\iff x = x_{1/2} = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 + 4\cdot 5}}{-2}$$

$$= \frac{4 \pm 6}{-2} = \begin{cases} -5 \\ 1 \end{cases}$$




Inoltre $f'(x)$ cambia segno in

- $x_1 = -5$ da "$-$" a "$+$" $\Rightarrow$ $x_1 = -5$ è un pto. di minimo locale
- $x_2 = 1$ da "$+$" a "$-$" $\Rightarrow$ $x_2 = 1$ è un pto. di massimo locale

Grafico: