Analisi Matematica (1). Durata della prova: 2 ore **13.6.24**

Cognome .... **Nome** ....

Matricola .... **Corso di Laurea** ....

D1	
D2	
E1	
E2	
E3	
E4	
E5	
Σ	

Domanda 1

[4 punti]

(i) Dare la definizione di derivata $f'(x_0)$ per una funzione $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in (a,b)$.

(ii) Calcolare l'equazione della retta tangente t di $f(x) = \frac{x^2}{x+2}$ nel punto $x_0 = 1$.

Risposta

(i) f è derivabile in $x_0 \in (a,b)$ con derivata $f'(x_0)$

se converge il limite $\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$

(oppure $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$)

(ii) • $t(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$

• $f(x_0) = f(1) = \frac{1^2}{1+2} = \frac{1}{3}$, • $f'(x) = \frac{(x+2) \cdot 2x - 1 \cdot x^2}{(x+2)^2}$

$\Rightarrow f'(x_0) = f'(1) = \frac{(1+2) \cdot 2 \cdot 1 - 1 \cdot 1^2}{(1+2)^2} = \frac{6-1}{9} = \frac{5}{9}$

Quindi $\underline{\underline{t(x) = \frac{1}{3} + \frac{5}{9}(x-1)}}$

Domanda 2

[4 punti]

(i) Enunciare il teorema degli zeri.

(ii) Verificare che l'equazione $x^5 + 1 = 5x$ ammette una soluzione nell'intervallo $[0,1]$.

Risposta

(i) Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ è continua con $f(a) \cdot f(b) < 0$, allora $\exists\, c \in (a,b)$ t.c. $f(c) = 0$.

(ii) • $x^5 + 1 = 5x \Leftrightarrow f(x) := x^5 + 1 - 5x = 0$

• $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ è continua

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ f(0) = 0^5 + 1 - 5 \cdot 0 = 1 > 0 \\ \bullet\ f(1) = 1^5 + 1 - 5 \cdot 1 = -3 < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow f(0) \cdot f(1) < 0$$

$\Rightarrow$ f ammette uno zero $c \in (0,1)$

$\Rightarrow$ l'equazione ammette una soluzione $c \in (0,1)$.

Esercizio 1

[4 punti]

Studiare la convergenza della serie

$$S := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n+2} =: a_n$$

Risoluzione

- $0 \leq a_n = \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n+2} \cdot \frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{(\cancel{n}+1)-\cancel{n}}{(n+2)\cdot(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}$

$$\leq \frac{1}{n\cdot\sqrt{n}} = \frac{1}{n^{3/2}}$$

- $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ converge

$\Rightarrow$ S converge

Esercizio 2

[4 punti]

Calcolare il polinomio di Maclaurin di ordine 4 della funzione $f(x) = \ln\big(e \cdot (1 + x^2)\big) - x \cdot \cos(x)$.

Risoluzione

- $\ln(e\cdot(1+x^2)) = \ln(e) + \ln(1+x^2) = 1 + \ln(1+x^2)$
- $\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + o(t^2)$ per $t \to 0$ $\Rightarrow$ (ponendo $t = x^2$)

$\ln(1+x^2) = x^2 - \frac{(x^2)^2}{2} + o(x^4)$ per $x \to 0$

Quindi risulta:

$$f(x) = 1 + x^2 - \frac{x^4}{2} - x\cdot\left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)\right)$$

$$= 1 + x^2 - \frac{x^4}{2} - x + \frac{x^3}{2} + o(x^4)$$

$$= 1 - x + x^2 + \frac{x^3}{2} - \frac{x^4}{2} + o(x^4)$$

$\Rightarrow$ $T_4(x) = 1 - x + x^2 + \frac{x^3}{2} - \frac{x^4}{2}$

Esercizio 3

[6 punti]

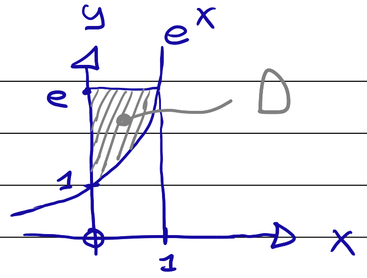
Disegnare il dominio $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 1,\ e^x \le y \le e\}$ e calcolare l'integrale doppio

$$I := \iint_D 4xy\, dx\, dy$$

Risoluzione

Il dominio D è y-semplice,

quindi per Fubini-Tonelli vale



$$I = \int_{x=0}^{1} \int_{y=e^x}^{e} 4x \cdot y\, dy\, dx$$

$$= \int_{x=0}^{1} \cancel{4}^{2} x \cdot \frac{y^2}{\cancel{2}}\Big|_{y=e^x}^{e} dx = \int_0^1 2x \cdot (e^2 - (e^x)^2)\, dx \qquad (e^x)^2 = e^{2x}$$

$$= 2e^2 \cdot \int_0^1 x\, dx - \int_0^1 \underbrace{2x}_{f} \cdot \underbrace{e^{2x}}_{g'}\, dx$$

$$= \cancel{2} e^2 \cdot \frac{x^2}{\cancel{2}}\Big|_0^1 - \left(\Big[\underbrace{\cancel{2}x}_{f} \cdot \underbrace{\tfrac{1}{\cancel{2}} e^{2x}}_{g}\Big]_0^1 - \int_0^1 \underbrace{\cancel{2}}_{f'} \cdot \underbrace{\tfrac{1}{\cancel{2}} e^{2x}}_{g} dx \right)$$

$$= \cancel{e^2} - \cancel{e^2} + \frac{1}{2} e^{2x}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}(e^2 - 1)$$

Esercizio 4

[4 punti]

Studiare la convergenza del limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x \cdot \sin(x) - y \cdot \sin(y)}{x^2 + y^2} =: f(x,y)$$

Risoluzione

Ponendo $y = m \cdot x$ segue

$$\lim_{x\to 0} f(x, m\cdot x) = \lim_{x \to 0} \frac{x \cdot \sin(x) - m \cdot x \cdot \sin(m \cdot x)}{x^2 + m^2 \cdot x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x}{x} \cdot \frac{\sin(x)}{x \cdot (1+m^2)} - \frac{x}{x} \cdot \frac{\sin(m x) \cdot m \cdot m}{x \cdot m \cdot (1+m^2)}$$

$$\frac{x}{x} = 1, \quad \frac{\sin(x)}{x} \to 1, \quad \frac{\sin(mx)}{x \cdot m} \to 1$$

$$= \frac{1}{1+m^2} - \frac{m^2}{1+m^2} = \frac{1-m^2}{1+m^2} \quad \text{dipende da } m$$

$$\Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) \text{ non esiste.}$$

Esercizio 5

[6 punti]

Trovare il dominio, eventuali zeri, asintoti e punti di estremo locale della funzione

$$f(x) = 1 - e^{(x^3+x^2-x)}$$

e tracciarne un grafico approssimativo.

Risoluzione

• Dominio: tutto $\mathbb{R}$, • zeri: $f(x) = 0 \iff e^{x^3+x^2-x} = 1 = e^0$

$\iff 0 = x^3 + x^2 - x = x \cdot (x^2 + x - 1) \iff x = 0$ opp. $x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$

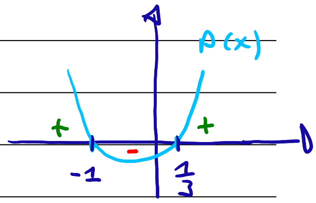
Quindi ci sono 3 zeri: $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ e $x_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

• asintoti: $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1 - e^{+\infty} = -\infty$, $\lim_{x\to-\infty} = 1 - e^{-\infty} = 1$

$\Rightarrow y = 1$ è un asintoto orizzontale per $x \to -\infty$

• studio di $f'(x)$: $f'(x) = \underbrace{-e^{(x^3+x^2-x)}}_{<0\ \forall x} \cdot \underbrace{(3x^2+2x-1)}_{=:\ p(x)} = 0$

$\iff x = \frac{-2 \pm \sqrt{4+12}}{6} = \frac{-2 \pm 4}{6} = \begin{cases} -1 \\ \frac{1}{3} \end{cases}$



Inoltre $f'(x)$ cambia segno in

- $x = -1$ da "−" a "+" $\Rightarrow x = -1$ è un pto. di minimo locale
- $x = \frac{1}{3}$ da "+" a "−" $\Rightarrow x = \frac{1}{3}$ — " — massimo — " —.

grafico: