Analisi Matematica 1, Scritto 1-B. Durata della prova: 2 ore 14.7.09

Cognome: .... Nome: ....

Matricola: .... Corso di Laurea: ....

D1	
D2	
E1	
E2	
E3	
E4	
E5	
E6	
Σ	

Domanda 1

[2+3 punti]

(i) Dare la definizione di differenziabilità per una funzione $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

(ii) Scrivere l'equazione del piano tangente al grafico di F in (x_0, y_0).

Risposta

(i) F è differenziabile in (x_0, y_0) se

$$F(x,y) - P(x,y) = o(\|(x-x_0, y-y_0)\|)$$
$$= o\left(\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}\right) \text{ per } (x,y)\to(x_0,y_0)$$

dove

(ii)
$$P(x,y) = F(x_0,y_0) + \text{grad}\, F(x_0,y_0) \cdot (x-x_0, y-y_0)$$
$$= F(x_0,y_0) + F_x(x_0,y_0)\cdot(x-x_0) + F_y(x_0,y_0)\cdot(y-y_0)$$

Domanda 2

[2+3 punti]

(i) Enunciare il criterio del rapporto per una serie numerica.

(ii) Studiare tramite il criterio precedente il carattere della serie $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n!}{n^n} =: a_n$

Risposta

(i) Sia $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ una serie con $a_n > 0$ definitivamente.

Se esiste $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} =: q$, allora la serie

- converge, se $q<1$
- diverge a $+\infty$, se $q>1$
- non si può dire nulla, se $q=1$.

(ii)
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} = \frac{\cancel{n!}\cancel{(n+1)} \cdot n^n}{(n+1)^n \cdot \cancel{(n+1)} \cdot \cancel{n!}} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$$

$$\xrightarrow[(n\to+\infty)]{} \frac{1}{e} < 1 \Rightarrow \text{la serie converge.}$$

Esercizio 1 [3 punti]

Siano A e B due insiemi limitati non vuoti. Quale delle seguenti affermazioni è equivalente a dire che $\sup A = \inf B$ $=: T$

- [X] Per ogni $a \in A$ e $b \in B$, si ha $a \leq b$. Inoltre per ogni $\epsilon > 0$, esistono $a \in A$ e $b \in B$ t.c. $b - a \leq \epsilon$.
- [b] Esistono $a \in A$ e $b \in B$ t.c. $a \leq b$. Inoltre per ogni $\epsilon > 0$, esiste $a \in A$ e $b \in B$ t.c. $b - a \leq \epsilon$.
- [c] Per ogni $a \in A$ e $b \in B$, si ha $a \leq b$.
- [d] Per ogni $a \in A$ e $\epsilon > 0$, esiste $b \in B$ t.c. $a \leq b + \epsilon$.

Risoluzione

Non b): basta scegliere $A = B = (0,1)$ e $a = b$

Non c): basta scegliere $A = (0,1)$, $B = (2,3) \Rightarrow \underset{1}{\sup A} < \underset{2}{\inf B}$

Non d): basta scegliere $A = (0,1)$, $B = \mathbb{R} \Rightarrow \sup A = 1$, $\inf B = -\infty$; e $a = b$.

Esercizio 2 [3 punti]

Se $a < b$ e $c \leq d$ allora

- [a] $a - c < b - d$
- [b] $b - c < a - d$
- [X] $a - d < b - c$
- [d] $c - a < d - b$

Risoluzione

$c \leq d \Rightarrow -c \geq -d$ cioè $-d \leq -c$.
Quindi con $a < b$ segue

$a - d < b - c \Leftrightarrow$ c)

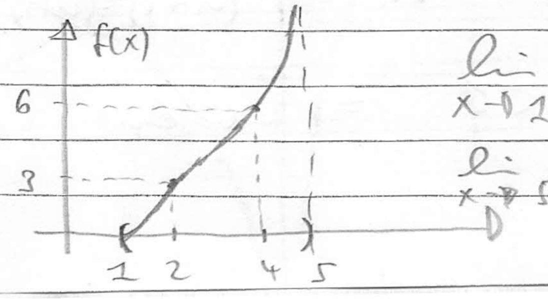
Esercizio 3 [4 punti]

Sia $f : (1,5) \to \mathbb{R}$ una funzione continua tale che $f(2) = 3$ e $f(4) = 6$. Che cosa possiamo dire di $f((1,5)) =: X$

- [a] è l'intervallo $[3,6]$
- [b] è un intervallo limitato che contiene $[3,6]$
- [X] è un intervallo che contiene $[3,6]$
- [d] è un intervallo chiuso che contiene $[3,6]$

Risoluzione

Per il teorema dei valori intermedi $f((1,5))$ è un intervallo che contiene $[3,6]$. Questo intervallo, però, in generale non è chiuso né limitato:



$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to 1^+} f(x) = 0 \\ \lim_{x \to 5^-} f(x) = +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow X = (0, +\infty)$$

Esercizio 4

[4 punti]

Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x \ln(1+x)\cos(x) - \sin(x)}{x^2} \qquad =: N(x)$$

Risoluzione

Sviluppiamo il numeratore fino al 2° grado:

$$N(x) = \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)\cdot\left(x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)\cdot\left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) - x + o(x^2)$$

$$= \left(x - \frac{x^2}{2} + x^2\right)\cdot\left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) - x + o(x^2)$$

$$= \cancel{x} - \frac{x^2}{2} + x^2 - \cancel{x} + o(x^2) = \frac{x^2}{2} + o(x^2) \sim \frac{x^2}{2}$$

$$\Rightarrow \text{limite} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2/2}{x^2} = \underline{\frac{1}{2}}.$$

Esercizio 5

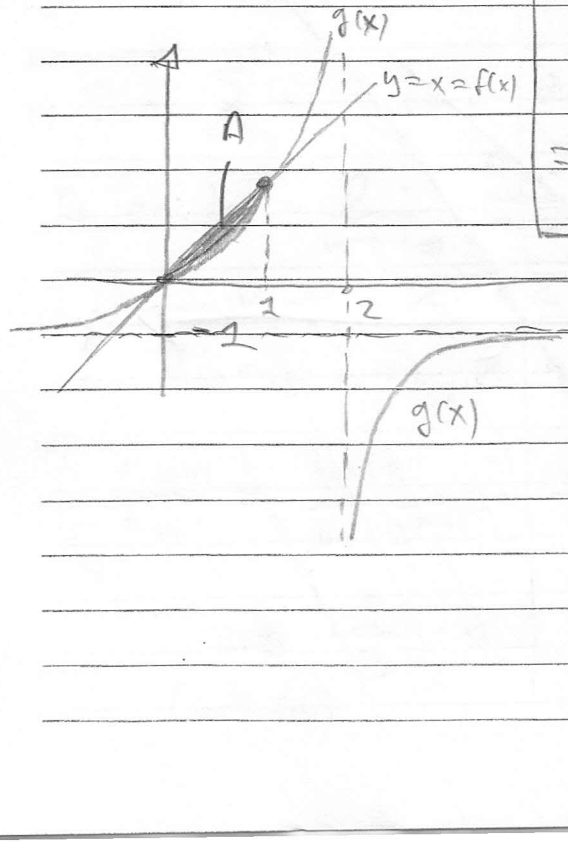
[4 punti]

Calcolare l'area (A) della regione di piano delimitata di grafici delle funzioni $f(x) = x$ e $g(x) = \frac{x}{2-x}$.

Risoluzione

$$g(x) = \frac{x-2+2}{2-x} = \frac{2}{2-x} - 1, \quad g(x) = f(x) \iff$$

$x = 0$ opp. $2 - x = 1 \iff \begin{cases} \cancel{x=0 \text{ opp}} \\ x = 1 \end{cases}$



$$\Rightarrow A = \int_0^1 \left(x - \frac{2}{2-x} + 1\right) dx$$

$$= \left(\frac{x^2}{2} + 2\ln|2-x| + x\right)\Big|_0^1$$

$$= \frac{1}{2} + 2\underbrace{\cancel{\ln(1)}}_{=0} + 1 - 0 - 2\ln(2) - 0$$

$$= \underline{\frac{3}{2} - 2\cdot\ln(2)}$$

Esercizio 6

[4 punti]

Studiare la funzione $f(x) = \frac{x^3-1}{x^2}$ e tracciarne un grafico approssimativo.

Risoluzione

- Dominio : $x \neq 0$

- Segno: $f(x) \geq 0 \Leftrightarrow x^3 \geq 1 \Leftrightarrow x \geq 1$

- Zeri : $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$

- $\lim_{x \to 0^\pm} f(x) = \frac{-1}{(0^\pm)^2} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$, $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$

$\Rightarrow$ asintoto verticale in $x = 0$.

- $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$, $\lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \to \pm\infty} \left(x - \frac{1}{x^2} - x\right) = 0$.

$\Rightarrow$ $y = x$ è un'asintoto obliquo

- $f'(x) = \frac{x^3+2}{x^3} = 1 + \frac{2}{x^3} = 0 \Leftrightarrow x^3 = -2$

$\Leftrightarrow x = \sqrt[3]{-2} = -\sqrt[3]{2} =: P_0$

$f''(x) = \frac{-6}{x^4} < 0 \ \forall x \neq 0 \Rightarrow P_0$ pto. di max. locale