Cognome .... **Nome** ....

Matricola .... **Corso di Laurea:** Informatica

D1	
D2	
E1	
E2	
E3	
E4	
E5	
Σ	

Domanda 1

[4 punti]

(i) Enunciare il criterio del rapporto per le serie numeriche.

(ii) Dire per quale $q \in \mathbb{R}$ e a quale somma $s \in \mathbb{R}$ converge la serie geometrica $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n$.

Risposta

(i) Sia $a_n > 0$ definitivamente e $\lim_{n \to +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} =: q$.

Allora la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$
- converge, se $q < 1$
- diverge a $+\infty$, se $q > 1$
- non si può concludere nulla sul comportamento della serie se $q = 1$.

(ii) $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n$ converge $\Leftrightarrow |q| < 1$

e in questo caso $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$

Domanda 2

[4 punti]

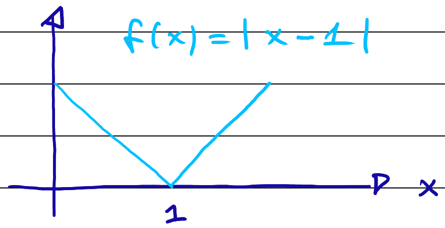
(i) Dare la definizione di continuià di una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nel punto $x_0 \in \mathbb{R}$.

(ii) Fare l'esempio di una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ che è continua ma non derivabile nel punto $x_0 = 1$.

Risposta

(i) f è continua in $x_0 \in \mathbb{R}$ se $\forall$ successione $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ con $\lim_{n \to +\infty} x_n = x_0$ segue che $\lim_{n \to +\infty} f(x_n) = f(x_0)$.

(ii) $f(x) = |x-1|$, $x \in \mathbb{R}$ è continua ma non derivabile in $x_0 = 1$



Esercizio 1

[5 punti]

Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{\cos(2x)-1}{x} + 2\cdot \sin(x)}{x^3} =: \ell$$

Risoluzione

Usando la formula di Taylor, si deve sviluppare il numeratore fino al 3° ordine:

- $\cos(t) = 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{24} + o(t^4)$ per $t \to 0$

$$\frac{\cos(2x)-1}{x} = \frac{\cancel{1} - \frac{(2x)^2}{2} + \frac{(2x)^4}{24} \cancel{-1} + o(x^4)}{x} = -2x + \frac{\overset{2}{\cancel{16}}}{\underset{3}{\cancel{24}}} x^3 + o(x^3)$$

$$= -2x + \frac{2}{3}x^3 + o(x^3) \quad \text{per } x \to 0$$

$$\Rightarrow \frac{\cos(2x)-1}{x} + 2\cdot \sin(x) = \cancel{-2x} + \frac{2}{3}x^3 + 2\cdot\left(\cancel{x} - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)$$

$$= \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3}\right)\cdot x^3 + o(x^3) \sim \frac{x^3}{3} \quad \text{per } x \to 0$$

$$\Rightarrow \ell = \lim_{x\to 0} \frac{x^3/3}{x^3} = \frac{1}{3}$$

Esercizio 2

[5 punti]

Calcolare l'integrale definito

$$I := \int_0^1 \frac{1-x}{1+x}\, dx$$

Risoluzione

- $\frac{1-x}{1+x} = \frac{-1-x+2}{1+x} = -1 + \frac{2}{1+x}$

$$\Rightarrow I = \int_0^1 \frac{2}{1+x} - 1 \, dx = \left[2\cdot \ln(1+x) - x\right]_0^1$$

$$= 2\cdot \ln(1+1) - 1 - 2\cdot \underbrace{\ln(1)}_{=0} + 0$$

$$= 2\cdot \ln(2) - 1$$

Esercizio 3

[4 punti]

Calcolare la derivata direzionale $D_v f(e,1)$ per la funzione $f(x,y) = x \cdot \ln\left(\frac{x}{y^2}\right)$ e il versore $v = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$.

Risoluzione

• f è C^1, quindi differenziabile e per il teorema del gradiente segue

$$D_v f(e,1) = f_x(e,1) \cdot \frac{3}{5} + f_y(e,1) \cdot \frac{4}{5}$$

• $f_x(x,y) = 1 \cdot \ln\left(\frac{x}{y^2}\right) + x \cdot \frac{y^2}{x} \cdot \frac{1}{y^2} = \ln\left(\frac{x}{y^2}\right) + 1$

$\Rightarrow f_x(e,1) = \ln\left(\frac{e}{1^2}\right) + 1 = 1 + 1 = 2$

• $f_y(x,y) = \cancel{x} \cdot \frac{\cancel{y^2}^{\,1}}{\cancel{x}} \cdot \frac{-2x}{y^{\cancel{3}\,1}} = -\frac{2x}{y} \Rightarrow f_y(e,1) = -\frac{2e}{1} = -2e$

$\Rightarrow D_v f(e,1) = 2 \cdot \frac{3}{5} - 2e \cdot \frac{4}{5} = \underline{\underline{\frac{6}{5} - \frac{8}{5} \cdot e}}$

N.B.: per semplificare la derivazione, volendo si può scrivere
$f(x,y) = x \cdot \left(\ln(x) - 2 \cdot \ln(y)\right)$

Esercizio 4

[4 punti]

Studiare la derivabilità parziale nel punto $(x_0, y_0) = (1,0)$ della funzione $f(x,y) = x \cdot |y|$

Risoluzione

• $f_x(1,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h,0) - f(1,0)}{h}$

$= \lim_{h \to 0} \frac{\overbrace{(1+h)\cdot|0| - 1\cdot|0|}^{=0}}{h} = 0$

• $f_y(1,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(1,h) - f(1,0)}{h}$

$= \lim_{h \to 0} \frac{1\cdot|h| - 1\cdot 0}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{|h|}{h}$

non esiste.

$\Rightarrow f$ non è derivabile parzialmente in $(1,0)$.

Esercizio 5 **[6 punti]**

Trovare il dominio, eventuali simmetrie, zeri, asintoti e punti di estremo locale della funzione

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^3}$$

e tracciarne un grafico approssimativo.

Risoluzione

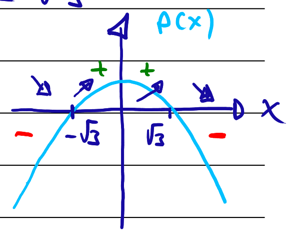
- Dominio: $X = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
- Simmetrie: $x^2 - 1$ è pari, x^3 è dispari $\Rightarrow$ $f(x)$ è dispari.
- Zeri: $f(x) = 0 \iff x^2 - 1 = 0 \iff x = \pm 1$.
- Asintoti:
  - $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \frac{-1}{0^+} = -\infty$, $\lim_{x \to 0^-} f(x) = \frac{-1}{0^-} = +\infty$

    $\Rightarrow$ $x = 0$ è un asintoto verticale di f.
  - $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2(1 - \frac{1}{x^2})}{x^3} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{1 - \frac{1}{x^2}}{x} = \frac{1}{\pm\infty} = 0$

    $\Rightarrow$ $y = 0$ è asintoto orizzontale per $x \to \pm\infty$
- Estremi locali: $f'(x) = \frac{x^3 \cdot 2x - 3x^2 \cdot (x^2 - 1)}{(x^3)^2} = \frac{2x^{\cancel{4}\,2} - 3x^{\cancel{4}\,2} + 3\cancel{x^2}\,1}{x^{\cancel{6}\,4}}$

  $= \frac{3 - x^2}{\underbrace{x^4}_{>0}} \overset{!}{=} 0 \iff x = \pm\sqrt{3}$

  Inoltre, segno $f'(x)$ = segno $p(x) := 3 - x^2$ e $p(x)$ cambia segno in



  - $x = -\sqrt{3}$ da "−" a "+"

    $\Rightarrow$ $x = -\sqrt{3}$ è un pto. di minimo locale
  - $x = +\sqrt{3}$ da "+" a "−"

    $\Rightarrow$ $x = \sqrt{3}$ è un pto. di massimo locale (ciò segue anche dal fatto che f è dispari!)

Grafico: