Cognome .... **Nome** ....

Matricola .... **Corso di Laurea** ....

D1	
D2	
E1	
E2	
E3	
E4	
E5	
Σ	

Domanda 1

[4 punti]

(i) Enunciare il test di monotonia per le funzioni derivabili.

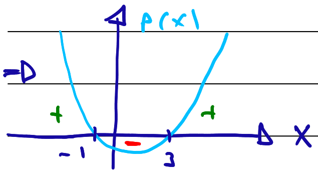
(ii) Trovare gli intervalli di crescenza della funzione $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$, $x \in \mathbb{R}$.

Risposta

(i) Se $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ è derivabile, allora

- f è crescente $\Leftrightarrow$ $f'(x) \geq 0$ $\forall x \in (a,b)$
- f è decrescente $\Leftrightarrow$ $f'(x) \leq 0$ $\forall x \in (a,b)$

(ii)
- $f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3 \cdot \overbrace{(x^2 - 2x - 3)}^{=:\,p(x)}$
- $p(x) = 0 \Leftrightarrow x = x_{1,2} = \dfrac{2 \pm \sqrt{2^2 + 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2} = \dfrac{2 \pm 4}{2} = \begin{cases} -1 \\ 3 \end{cases}$

$\Rightarrow$ 

$\Rightarrow$ f è crescente in $(-\infty, -1)$ e $(3, +\infty)$

Domanda 2

[4 punti]

(i) Dare la definizione di convergenza per una successione numerica $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(ii) Dare l'esempio di una successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente al limite $l = \pi$.

Risposta

(i) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge al limite $l \in \mathbb{R}$ se $\forall \varepsilon > 0$ $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tale che $|l - x_n| < \varepsilon$ $\forall n \geq n_0$

(ii) P.e. se $x_n = \pi + \frac{1}{n+1}$ per $n \in \mathbb{N}$, allora

$$\lim_{n \to +\infty} x_n = \pi$$

Esercizio 1 **[5 punti]**

Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\cdot\cos(x)-\sin(x)}{x\cdot\ln(1-x^2)} =: \ell$$

Risoluzione

- $\ln(1+t) \sim t$ per $t \to 0 \Rightarrow \ln(1-x^2) \sim -x^2$ per $x \to 0$

$\Rightarrow x\cdot\ln(1-x^2) \sim x\cdot(-x^2) = -x^3$ per $x \to 0$

$\rightarrow$ numeratore da sviluppare fino al 3° ordine:

- $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3) \Rightarrow x\cdot\cos(x) = x - \frac{x^3}{2} + o(x^3)$ per $x \to 0$

- $\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$

$\Rightarrow x\cdot\cos(x) - \sin(x) = \cancel{x} \underbrace{-\frac{x^3}{2}}_{= -\frac{3}{6}x^3} - \cancel{x} + \frac{x^3}{6} + o(x^3) = -\frac{2}{6}x^3 + o(x^3)$

$\sim -\frac{x^3}{3}$ per $x \to 0$

$\Rightarrow \ell = \lim_{x\to 0} \frac{-x^3/3}{-x^3} = 1/3$

Esercizio 2 **[5 punti]**

Calcolare, se converge, l'integrale improprio

$$I := \int_0^e x\cdot \underbrace{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}_{= -\ln(x)} dx$$

Risoluzione

- $I = \lim_{a\to 0^+} -\int_a^e x\cdot\ln(x)\,dx$

- usando integrazione per parti segue

$\int \underbrace{x}_{f'}\cdot\underbrace{\ln(x)}_{g}\,dx = \underbrace{\frac{x^2}{2}}_{f}\cdot\underbrace{\ln(x)}_{g} - \int \underbrace{\frac{x^2}{2}}_{f}\cdot\underbrace{\frac{1}{x}}_{g'}\,dx \quad \left(\frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x} = \frac{x}{2}\right)$

$= \frac{x^2}{2}\cdot\ln(x) - \frac{x^2}{4} + c$

$\Rightarrow \int_a^e x\cdot\ln\left(\frac{1}{x}\right)dx = -\left[\frac{x^2}{2}\cdot\ln(x) - \frac{x^2}{4}\right]_a^e$

$= -\left(\frac{e^2}{2}\cdot\underbrace{\ln(e)}_{=1} - \frac{e^2}{4} - \frac{a^2}{2}\cdot\ln(a) + \frac{a^2}{4}\right)$

$= -\left(\frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} - \underbrace{\frac{a^2}{2}\cdot\ln(a)}_{\to 0} + \underbrace{\frac{a^2}{4}}_{\to 0}\right)$

$\rightarrow -\frac{e^2}{2} + \frac{e^2}{4} = -\frac{e^2}{4}$ per $a \to 0^+$

Quindi $I = -\frac{e^2}{4}$

Esercizio 3

[4 punti]

$$= (x+y)^{1/2} \cdot y^{-1/2}$$

Calcolare la derivata direzionale $D_v f(3,1)$ per la funzione $f(x,y) = \sqrt{\frac{x+y}{y}}$ e il versore $v = \left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$.

Risoluzione

- $D_v f(3,1) = f_x(3,1) \cdot \frac{4}{5} + f_y(3,1) \cdot \frac{3}{5}$

- $f_x(x,y) = \frac{1}{2} \cdot (x+y)^{-\frac{1}{2}} \cdot 1 \cdot y^{-1/2}$

$$\frac{1}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow f_x(3,1) = \frac{1}{2} \cdot \underbrace{(3+1)^{-\frac{1}{2}}}_{=\frac{1}{2}} \cdot \underbrace{1^{-1/2}}_{=1} = \frac{1}{4}$$

- $f_y(x,y) = \frac{1}{2}(x+y)^{-\frac{1}{2}} \cdot 1 \cdot y^{-\frac{1}{2}} + (x+y)^{1/2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot y^{-3/2}$

$$\Rightarrow f_y(3,1) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3+1} \cdot \underbrace{1^{-3/2}}_{=1} = \frac{1}{4} - 1 = -\frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow D_v f(3,1) = \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{5} - \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{5} = \frac{4-9}{20} = -\frac{5}{20} = -\frac{1}{4}$$

Esercizio 4

[4 punti]

Studiare la continuità, la derivabilità e la differenziabilità nel punto $(x_0, y_0) = (0,0)$ della funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(1-\cos(x)) \cdot e^y}{x^2 + 2y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ \frac{1}{2} & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Risoluzione

- $\lim_{y \to 0} f(0,y) = \lim_{y \to 0} \underbrace{\frac{\overbrace{(1-\cos(0))}^{=0} \cdot e^y}{2 \cdot y^2}}_{=0} = 0 \neq \frac{1}{2} = f(0,0)$

$\Rightarrow$ f non è continua in $(0,0)$ $\Rightarrow$ f non è differenziabile in $(0,0)$

- $f_x(0,0) = \lim_{x \to 0} \dfrac{f(x,0) - f(0,0)}{x} = \lim_{x \to 0} \dfrac{\frac{(1-\cos(x)) \cdot \overbrace{e^0}^{=1}}{x^2 + 2 \cdot 0^2} - \frac{1}{2}}{x}$

$$= \lim_{x \to 0} \left(\frac{1-\cos(x) \cdot 2}{x^3 \cdot 2} - \frac{1 \cdot x^2}{2x \cdot x^2} \right) = \lim_{x \to 0} \left(\frac{2 - 2\cos(x) - x^2}{2x^3} \right)$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\cancel{2} - 2 \cdot (\cancel{1} - \cancel{\frac{x^2}{2}} + o(x^3)) - \cancel{x^2}}{2x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{o(x^3)}{2x^3} = 0$$

- $f_y(0,0) = \lim_{y \to 0} \dfrac{f(0,y) - f(0,0)}{y} = \lim_{y \to 0} \dfrac{0 - \frac{1}{2}}{y}$ non converge

$\Rightarrow$ f è derivabile in $(0,0)$ rispetto a x con $f_x(0,0) = 0$

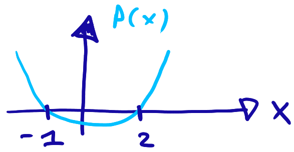
f non è derivabile in $(0,0)$ rispetto a y.

Esercizio 5 **[6 punti]**

Trovare il dominio, zeri, asintoti e punti di estremo locale della funzione

$$f(x) = \ln\Big(\frac{x^2 - x - 2}{x^2}\Big)$$

e tracciarne un grafico approssimativo.



Risoluzione

Dominio X: $x \in X \iff x \neq 0$ e $\dfrac{\overbrace{x^2 - x - 2}^{=(x-2)\cdot(x+1)=:p(x)}}{x^2} > 0 \iff x \neq 0$ e $p(x) > 0$

$\iff x < -1$ opp. $x > 2$, quindi $X = (-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$

zeri: $f(x) = 0 \iff \dfrac{x^2 - x - 2}{x^2} = 1 \iff \cancel{x^2} - x - 2 = \cancel{x^2}\, 0 \iff x = -2$

asintoti: $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \ln\Big(\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x^2-x-2}{x^2}\Big) = \ln(1) = 0$

$\Rightarrow y = 0$ è un asintoto orizzontale per $x \to \pm\infty$

$\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = \ln\Big(\dfrac{0^+}{(-1)^2}\Big) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to 2^-} = \ln\Big(\dfrac{0^+}{2^2}\Big) = -\infty$

$\Rightarrow x = -1$ e $x = 2$ sono asintoti verticali.

estremi locali: $f'(x) = \dfrac{\cancel{x^2}\,1}{x^2 - x - 2} \cdot \dfrac{x^2\cdot(2x-1) - 2x\cdot(x^2-x-2)}{(x^2)^{\cancel{2}\,1}}$

$= \dfrac{1}{x^2-x-2} \cdot \dfrac{\cancel{2x^3} - x^2 \cancel{-2x^3} + 2x^2 + 4x}{x^2}$

$= \dfrac{\cancel{x^2} + 4\cancel{x}}{x^{\cancel{2}} \cdot (x^2-x-2)} = \dfrac{x+4}{x\cdot(x^2-x-2)} = 0$

$\iff x = -4$. Quindi $x = -4$ è l'unico candidato per un punto di estremo locale. Inoltre, il denominatore $x\cdot(x^2-x-2)$ in $x=-4$ è $(-4)\cdot((-4)^2 + 4 - 2) < 0$ e il numeratore in $x = -4$ cambia segno da "−" a "+". Quindi $f'(x)$ cambia segno in -4 da "+" a "−" $\Rightarrow x = -4$ è un pto. di massimo locale.

Grafico: