Analisi Matematica 1, Scritto 1-A. Durata della prova: 2 ore **15.5.09**

Cognome: .... **Nome:** ....

Matricola: .... **Corso di Laurea:** ....

Domanda 1 **[2+3 punti]**

(i) Dare la definizione di limite di una successione

(ii) Fare un esempio di successione oscillante non limitata

Risposta

(i)

(ii)

Domanda 2 **[2+3 punti]**

(i) Dare la definizione di derivate direzionali per una funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

(ii) Enunciare il Teorema del gradiente

Risposta

(i)

(ii)

Esercizio 1

[3 punti]

Sia $f : [0, 1) \to \mathbb{R}$ continua e sia $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ per $x \in [0, 1)$. Allora

- $\boxed{\text{a}}$ se $\lim_{x\to 1^-} F(x) = +\infty$ allora $f(x) \sim \dfrac{1}{1-x}$ per $x \to 1^-$
- $\boxed{\text{b}}$ se $\lim_{x\to 1^-} F(x)$ converge, allora anche $\lim_{x\to 1^-} f(x)$ esiste
- $\boxed{\text{c}}$ se $\lim_{x\to 1^-} f(x)$ converge, allora anche $\lim_{x\to 1^-} F(x)$ esiste
- $\boxed{\text{d}}$ nessuna delle precedenti

Risoluzione

Esercizio 2

[3 punti]

Siano $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tre successioni tale che $a_n \leq b_n \leq c_n$ definitivamente. Dire quale delle seguenti affermazioni *non* è corretta

- $\boxed{\text{a}}$ Se $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergono allora anche $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge
- $\boxed{\text{b}}$ Se $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sono infinitesime allora anche $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è infinitesima
- $\boxed{\text{c}}$ Se $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge a $+\infty$ allora $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergono a $+\infty$
- $\boxed{\text{d}}$ Se $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge a $-\infty$ anche $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergono a $-\infty$

Risoluzione

Esercizio 3

[4 punti]

Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione non limitata tale che $0 < a_n < a_{n+2}$. Allora

- $\boxed{\text{a}}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{a_n}$ converge
- $\boxed{\text{b}}$ Esiste $M > 0$ tale che per ogni $n > M$, $a_n > 1$
- $\boxed{\text{c}}$ Per ogni $\varepsilon > 0$, per ogni $M > 0$ esiste $n > M$ tale che $a_n > \varepsilon$
- $\boxed{\text{d}}$ Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $M > 0$ tale che per ogni $n > M$ vale $a_n > \varepsilon$

Risoluzione

Esercizio 4

[4 punti]

Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{e^{\frac{1}{x-2}}}{(x-2)^3} \cdot \sin(x-2)$$

Risoluzione

Esercizio 5

[4 punti]

Trovare i punti critici di di $f(x,y) = -2 + x^3 - 4xy + 4y^2$ e classificarli.

Risoluzione

Esercizio 6

[4 punti]

Calcolare, se converge, l'integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(x)}{1+x^2}\, dx$$

Risoluzione