Analisi Matematica 1, Scritto 1-B. Durata della prova: 2 ore **15.5.09**

Cognome: .... **Nome:** ....

Matricola: .... **Corso di Laurea:** ....

D1	
D2	
E1	
E2	
E3	
E4	
E5	
E6	
Σ	

Domanda 1

[2+3 punti]

(i) Dare la definizione di estremo superiore per un insieme $A \subset \mathbb{R}$

(ii) Fare un esempio di insieme limitato superiormente, che non ammetta massimo

Risposta

(i) estremo superiore di A = maggiorante più piccolo di $A =: s_0$ cioè

$$s_0 = \sup A \Leftrightarrow \begin{cases} a \leq s_0 \quad \forall a \in A \text{ (s_0 è maggiorante)} \\ \forall \varepsilon > 0 \, \exists a \in A : s_0 - \varepsilon < a \text{ ($s_0 - \varepsilon$ non è più maggiorante)} \end{cases}$$

(ii) Basta considerare $A = [0, 1) \Rightarrow \sup A = 1 \notin A$

$\Rightarrow \max A$ non esiste

Domanda 2

[2+3 punti]

(i) Enunciare il teorema sulla caratterizzazione dei punti critici di una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ attraverso le derivate di ordine superiore

(ii) Fare un esempio di applicazione del teorema precedente

Risposta

(i) Se $f \in C^n(a, b)$ e $x_0 \in (a, b)$ t.c. $f'(x_0) = 0 = f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0)$ e $f^{(n)}(x_0) \neq 0$, allora: se n è pari x_0 è un pto. di

- massimo locale se $f^{(n)}(x_0) < 0$
- minimo locale se $f^{(n)}(x_0) > 0$.

Non è un pto. di estr. locale se n è dispari.

(ii) Poniamo $f_1(x) = x^2$, $f_2(x) = x^3$. Allora

$f_1'(0) = 0$, $f_1''(0) = 2 > 0 \xRightarrow{n=2 = \text{pari}} x_0 = 0$ pto. di min. per f_1

$f_2'(0) = 0 = f_2''(0)$, $f_2'''(0) = 6 \xRightarrow{n=3 = \text{dispari}} x_0 = 0$ non è un pto. di estr. loc. per f_2

Esercizio 1

[3 punti]

Sia data la funzione $f(x) = 2x + \cos(x)$. Allora la derivata della funzione inversa $f^{-1}(y)$ nel punto $y = 2\pi - 1$ vale

a $\frac{1}{\pi+1}$ ~~b~~ $\frac{1}{2}$ c 2 d $+\infty$

Risoluzione

$f(x) = y = 2\pi - 1 \iff x = \pi$. Inoltre vale

$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{2-\sin(\pi)} = \frac{1}{2}$

$f'(x) = 2 - \sin(x)$

Esercizio 2

[3 punti]

Sia $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ una serie divergente a termini negativi. Allora

a $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{a_n}$ converge

b $\lim_{n\to+\infty} a_n \neq 0$

c Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste n tale $a_n < -\varepsilon$

~~d~~ esiste $\varepsilon > 0$ tale che $|\sin(a_n)| < \varepsilon$ per ogni n

Risoluzione

Per qualsiasi $x \in \mathbb{R}$ vale $|\sin(x)| \leq 1$ e quindi

basta scegliere $\varepsilon = 2$ in $\boxed{d}$.

Esercizio 3

[4 punti]

Sia h derivabile tale che $x \cdot h(x) = \int_0^x h(t)dt$, allora

a $h(1) < 0$ ~~b~~ $h'(1) = 0$ c $h(1) > 0$ d $h(1) - h(0) = 0$

Risoluzione

Dal teorema fondamentale del calcolo integrale

segue derivando entrambi i lati dell'equazione:

$\cancel{1 \cdot h(x)} + x \cdot h'(x) = \cancel{h(x)}$ $\Rightarrow x \cdot h'(x) = 0$

$\Rightarrow h'(1) = 0$

per $x=1$

Esercizio 4

[4 punti]

Calcolare l'integrale definito

$$\int_0^3 \frac{3x}{\sqrt{4-x}}\,dx =: I$$

Risoluzione

Poniamo $\sqrt{4-x} = t \Rightarrow 4-x = t^2 \Leftrightarrow x = 4-t^2$

$\Rightarrow \frac{dx}{dt} = -2t$ cioè $dx = -2t\,dt$. Inoltre vale

$x=0 \Rightarrow t = \sqrt{4} = 2$, $x = 3 \Rightarrow t = \sqrt{4-3} = 1$. Quindi

$I = \int_2^1 \frac{3\cdot(4-t^2)}{\cancel{t}}\cdot(-2\cancel{t})\,dt = -6\int(4-t^2)\,dt$

$= 6\int_1^2 (4-t^2)\,dt = 6\left[4t - \frac{t^3}{3}\right]_1^2 = 6\left[\left(4\cdot 2 - \frac{2^3}{3}\right) - \left(4 - \frac{1}{3}\right)\right] = \ldots = \underline{\underline{10}}$

Esercizio 5

[4 punti]

Trovare i punti critici di di $f(x,y) = 200x^4 + 100y^5 - xy$ e classificarli

Risoluzione

<u>Punti critici:</u> $f_x(x,y) = 800x^3 - y \overset{!}{=} 0 \Rightarrow y = 800x^3$

$f_y(x,y) = 500y^4 - x \overset{!}{=} 0 \Rightarrow x = 500y^4$

$\Rightarrow y = 800x^3 = 800\cdot(500y^4)^3 = 8\cdot 10^2\cdot 5^3\cdot(10^2)^3\cdot y^{12}$

$= 8\cdot 125\cdot 10^8\cdot y^{12} = 10^3\cdot 10^8\cdot y^{12} = 10^{11}\cdot y^{12}$

$\Rightarrow 0 = y - 10^{11}\cdot y^{12} = y(1 - 10^{11}\cdot y^{11}) \Rightarrow$

$y = \begin{cases} \frac{1}{10} \\ 0 \end{cases} \Rightarrow x = 500\cdot y^4 = \begin{cases} \frac{1}{20} \\ 0 \end{cases} \Rightarrow \exists\, 2$ pti

critici: $P_0 = (0,0)$, $P_1 = \left(\frac{1}{20}, \frac{1}{10}\right)$.

<u>Hessiana:</u> $H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2400x^2 & -1 \\ -1 & 2000y^3 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$H_f(P_0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} =: H_0$ con $\det(H_0) < 0 \Rightarrow P_0 =$ <u>pto. di sella</u>

$H_f(P_1) = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = H_1$ con $(H_1)_{11} = 6 > 0$ e $\det(H_1) > 0$

$\Rightarrow P_1 =$ pto. di <u>minimo</u> locale.

Esercizio 6

[4 punti]

Studiare la funzione $f(x) = \frac{x^3-1}{2x^3+5}$ tracciandone un grafico approssimativo

Risoluzione

Dominio: $x \in$ dominio di $f \iff 2x^3+5 \neq 0 \iff x \neq -\sqrt[3]{\frac{5}{2}}$

Intersez. con assi: $f(x)=0 \iff x^3-1=0 \iff x=1$

$f(0) = -\frac{1}{5}$

Asintoti: $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\cancel{x^3}\left(1-\frac{1}{x^3}\right)}{\cancel{x^3}\left(2+\frac{5}{x^3}\right)} = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow$ asintoto orizzontale $y=\frac{1}{2}$ per $x\to\pm\infty$.

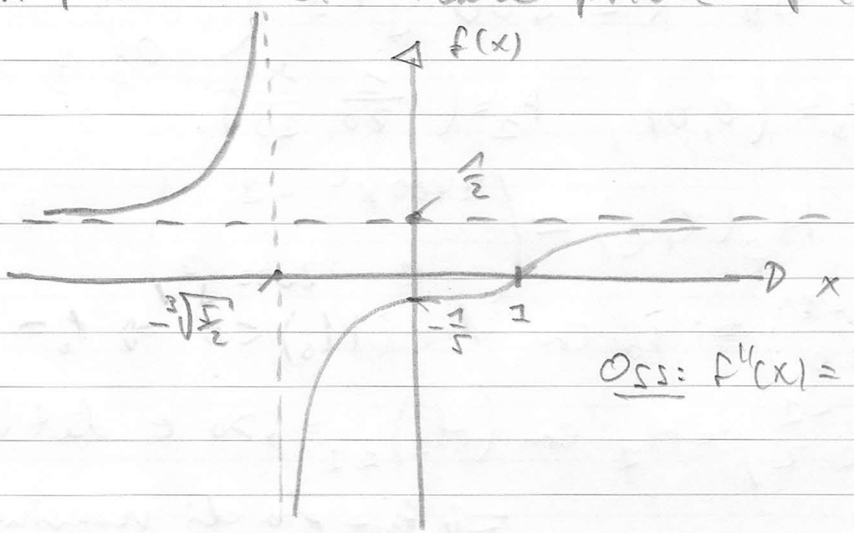
$\lim_{x\to -\sqrt[3]{\frac{5}{2}}^+} f(x) = \frac{-5/2-1}{0^+} = -\infty$

$\lim_{x\to -\sqrt[3]{5/2}^-} f(x) = \frac{-5/2-1}{0^-} = +\infty$

$x=-\sqrt[3]{\frac{5}{2}}$ è un asintoto verticale

Derivata: $f'(x) = \ldots = 21\frac{x^2}{(2x^3+5)^2} = 0 \iff x=0$

$\Rightarrow x=0$ è l'unico pto critico che però non è un pto. di estr. locale poiché $f'(x)>0 \ \forall x\neq 0$, $\neq -\sqrt[3]{\frac{5}{2}}$



Oss: $f''(x) = -42\frac{x\cdot(4x^3-5)}{(2x^3+5)^3}$