Analisi Matematica 1, Scritto 1-A. Durata della prova: 2 ore **15.9.10**

Cognome: .... **Nome:** ....

Matricola: .... **Corso di Laurea:** .... **Canale:** $\boxed{A}$ $\boxed{B}$ $\boxed{C}$ $\boxed{\text{E-A}}$ $\boxed{08/09}$

D1	
D2	
E1	
E2	
E3	
E4	
E5	
E6	
Σ	

Domanda 1

[2+3 punti]

(i) Dare la definizione di continuità per una funzione $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

(ii) Verificare se $f(x) = \frac{|x|}{x} - x$ è continua in $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Risposta

(i) f è continua in $x_0 \in D$ se $\forall$ successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con $x_n \to x_0$ per $n \to +\infty$ segue che

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f(x_0).$$

f è continua se è continua in ogni $x_0 \in D$.

(ii) Come composizione di funzioni continue f è continua in D.

Domanda 2

[2+3 punti]

(i) Enunciare il Teorema del gradiente per una funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

(ii) Calcolare l'equazione del piano tangente al grafico di $f(x, y) = e^{\sin(x)\cdot\cos(y)}$ in $(0, 0)$.

Risposta

(i) Se f è differenziabile in $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, allora $\forall$ versore $v \in \mathbb{R}^2$ esiste la derivata direzionale $D_v f(x_0, y_0)$ ed inoltre

prodotto scalare

$$D_v f(x_0, y_0) = \text{grad}\, f(x_0, y_0) \cdot v$$

(ii) L'equazione del piano tangente è

$p(x,y) = f(0,0) + f_x(0,0)\cdot(x-0) + f_y(0,0)\cdot(y-0)$.

Visto che

$f_x(x,y) = e^{\sin(x)\cdot\cos(y)} \cdot \cos(x)\cdot\cos(y) \Rightarrow f_x(0,0) = e^0 \cdot 1 \cdot 1 = 1$

$f_y(x,y) = e^{\sin(x)\cdot\cos(y)} \cdot (-\sin(x)\cdot\sin(y)) \Rightarrow f_y(0,0) = e^0 \cdot 0 \cdot 0 = 0$

$f(0,0) = e^0 = 1$

$\Rightarrow p(x,y) = 1 + 1\cdot x + 0 \cdot y = \underline{\underline{1 + x}}$

Esercizio 1

[3 punti]

Sia $f \in C^1[0,1]$ tale che $f(0) = 0$ e $f(1) = 2$. Allora

[a] f è invertibile [b] f è concava [c] $f'(0) \geq 0$ [d] esiste $x \in [0,1]$ tale che $f'(x) = 2$

Risoluzione

Per il teorema di Lagrange $\exists x \in [0,1]$ t.c.

$\frac{f(1)-f(0)}{1-0} = f'(x)$

$\frac{2-0}{1} = 2$

Esercizio 2

[3 punti]

Il polinomio di Taylor di $f(x) = x^x$ con centro $x_0 = 1$ e ordine $n = 2$ è dato da

[a] $(x^x - 1)^2$ [b] $1 - x + x^2$ [c] $2 - (x-1) - (x-1)^2$ [d] non si può calcolare

Risoluzione

Per esclusione: $f(x) = x^x = e^{x \cdot \ln(x)}$ $\Rightarrow$ la funzione f è in $C^\infty(0,+\infty)$, in particolare il polinomio di Taylor di qualsiasi ordine in $x_0 = 1$ esiste, cioè non d).
non a) in quanto $(x^x-1)^2$ non è un polinomio
non c) in quanto $p(x) = 2-(x-1)-(x-1)^2$ in $x_0 = 1$ vale $p(1) = 2 \neq 1 = f(1)$
$\Rightarrow$ b

Esercizio 3

[3 punti]

Siano $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ successioni tali che $a_n = e^{-b_n} + b_n^2$. Allora

[a] $a_n \geq b_n$ definitivamente

[b] $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è limitata inferiormente

[c] $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$

[d] $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è irregolare

Risoluzione

- $e^x \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow e^{-b_n} \geq 0 \ \forall n$
- $b_n^2 \geq 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow a_n \geq 0 \ \forall n$, quindi b)

Esercizio 4 [4 punti]

Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt{\ln(n)}-\sqrt{\ln(2n+1)}\right) = 0$$

Risoluzione

$$\sqrt{\ln(n)}-\sqrt{\ln(2n+1)} = \frac{\left(\sqrt{\ln(n)}-\sqrt{\ln(2n+1)}\right)\cdot\left(\sqrt{\ln(n)}+\sqrt{\ln(2n+1)}\right)}{\sqrt{\ln(n)}+\sqrt{\ln(2n+1)}}$$

$$= \frac{\ln(n)-\ln(2n+1)}{\sqrt{\ln(n)}+\sqrt{\ln(2n+1)}} = \frac{\ln\left(\frac{n}{2n+1}\right)}{\sqrt{\ln(n)}+\sqrt{\ln(2n+1)}}$$

$$\to \frac{\ln(1/2)}{+\infty} = 0 \quad \text{per } n\to+\infty$$

Esercizio 5 [4 punti]

Usando la regola della catena, calcolare la derivata di $h(x) = f(g(x))$ per $f(u,v) = u\cdot\sin(v)$ e $g(x) = (\cos(x), x)^T$.

Risoluzione

Per la regola della catena vale per $h = f\circ g$

$J_h(x) = J_f(g(x))\cdot J_g(x)$. Inoltre

$J_f(u,v) = \text{grad } f(u,v) = (\sin(v),\ u\cdot\cos(v))$

$J_g(x) = \begin{pmatrix} -\sin(x) \\ 1 \end{pmatrix}$. Quindi risulta

$$J_h(x) = h'(x) = (\sin(x),\ \cos(x)\cdot\cos(x))\cdot\begin{pmatrix} -\sin(x) \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \underline{\underline{-\sin^2(x)+\cos^2(x)}}$$

prodotto tra matrici

Esercizio 6 **[5 punti]**

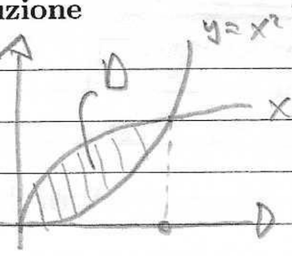
Disegnare la regione D limitata dalle parabole $y = x^2$ e $y^2 = x$ e calcolare l'integrale doppio

$$I = \iint_D x \cdot y \, dx \, dy.$$

In alternativa per i soli studenti immatricolati prima del a.a. 2009/2010:

Studiare il carattere della serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{n^\alpha \cdot \sin\left(\frac{1}{n^2+1}\right)}_{=:\, a_n}$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

Risoluzione



$x = y^2 \iff y = \sqrt{x}$

1

$x^2 = \sqrt{x} \iff x = \begin{cases} 0 & \text{opp.} \\ 1 \end{cases}$

Quindi D è y-semplice: $D = \{(x,y) \mid x \in [0,1],\ x^2 \le y \le \sqrt{x}\}$

$\Rightarrow$ (per Fubini–Tonelli)

$$I = \int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{x}} x y \cdot dy \, dx = \int_0^1 x \cdot \frac{y^2}{2}\Big|_{y=x^2}^{y=\sqrt{x}} dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 x \cdot (x - x^4)\, dx = \frac{1}{2}\int_0^1 (x^2 - x^5)\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^6}{6}\right]_0^1 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} = \underline{\underline{\frac{1}{12}}}$$

Visto che $\frac{1}{n^2+1} \to 0$ per $n \to +\infty$ segue

$\sin\left(\frac{1}{n^2+1}\right) \sim \frac{1}{n^2+1} \sim \frac{1}{n^2}$ per $n \to +\infty$

Quindi $a_n \sim \frac{n^\alpha}{n^2} = n^{\alpha-2}$ per il principio di sostituzione

Inoltre

$\sum_{n=1}^{+\infty} n^\beta$ converge $\iff \beta < -1$, quindi per

$\beta = \alpha - 2$ segue dal criterio del confronto che

la serie converge $\iff \alpha - 2 < -1 \iff \underline{\alpha < 1}$