Analisi Matematica. Durata della prova: 2 ore **15.1.24**

Firma: .....

Cognome ..... **Nome** .....

Matricola ..... **Corso di Laurea:** Informatica

D1	
D2	
E1	
E2	
E3	
E4	
E5	
Σ	

Domanda 1

[4 punti]

(i) Dare la definizione di derivata $f'(x_0)$ per una funzione $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in (a, b)$.

(ii) Dare l'esempio di una funzione f che è continua ma non derivabile in $x_0 = 1$.

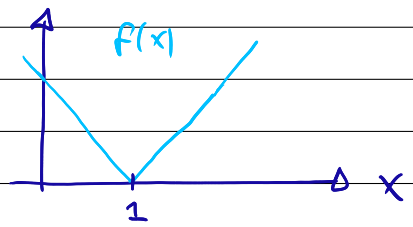
Risposta

(i) La derivata prima è data dal limite

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$ se tale limite converge.

(oppure $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$)

(ii) P.e. $f(x) := |x-1|$ è continua ma non derivabile in $x_0 = 1$



Domanda 2

[4 punti]

(i) Enunciare il Teorema degli Zeri.

(ii) Verificare che equazione $1 - x = \sin(x^2)$ ammette una soluzione $x \in [0, 1]$.

Risposta

(i) Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua t.c. $f(a) \cdot f(b) < 0$.
Allora $\exists\, c \in (a,b)$ t.c. $f(c) = 0$.

(ii)
- $1 - x = \sin(x^2) \iff f(x) := 1 - x - \sin(x^2) = 0$.
- $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ è continua
- $f(0) = 1 - 0 - \sin(0) = 1 > 0$
- $f(1) = 1 - 1 - \sin(1) = -\sin(1) < 0$

$\Rightarrow \exists\, c \in (0,1)$ t.c. $f(c) = 0 \Rightarrow 1 - c = \sin(c^2)$.

Esercizio 1

[5 punti]

Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x) - e^x + \ln(1+x)}{x \cdot \sin(x)} =: \ell$$

Risoluzione

- $x \cdot \sin(x) \sim x \cdot x = x^2$ per $x \to 0$ $\Rightarrow$
- Numeratore da sviluppare fino al 2° ordine:

$$\cos(x) - e^x + \ln(1+x) = \cancel{1} - \frac{x^2}{2} - \left(\cancel{1} + \cancel{x} + \frac{x^2}{2}\right) + \cancel{x} - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

$$= -\frac{3}{2}x^2 + o(x^2) \sim -\frac{3}{2}x^2 \text{ per } x \to 0$$

$$\Rightarrow \ell = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{3}{2}\cdot x^2}{x^2} = -\frac{3}{2}$$

per il principio di sostituzione

Esercizio 2

[5 punti]

Calcolare l'integrale definito

$$I := \int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{x}_{f} \cdot \underbrace{\cos(x)}_{g'}\, dx$$

Risoluzione

Usando integrazione per parti segue

$$I = \underbrace{\left[x \cdot \sin(x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}}_{f \cdot g} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{1}_{f'} \cdot \underbrace{\sin(x)}_{g}\, dx$$

$$= \frac{\pi}{2} \cdot \underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{=1} - \underbrace{0 \cdot \sin(0)}_{=0} + \left[\cos(x)\right]_0^{\pi/2}$$

$$= \frac{\pi}{2} + \underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{=0} - \underbrace{\cos(0)}_{=1} = \frac{\pi}{2} - 1$$

Esercizio 3

[4 punti]

Calcolare la derivata direzionale $D_v f(1,2)$ per la funzione $f(x,y) = \dfrac{x \cdot e^x}{y}$ e il versore $v = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$.

Risoluzione

- La funzione f è C^1 quindi differenziabile
- Per il teorema del gradiente segue

$$D_v f(1,2) = \frac{3}{5} \cdot f_x(1,2) + \frac{4}{5} \cdot f_y(1,2)$$

- $f_x(x,y) = \frac{1}{y} \cdot (1 \cdot e^x + x \cdot e^x) \Rightarrow f_x(1,2) = \frac{1}{2} \cdot (e^1 + 1 \cdot e^1) = e$
- $f_y(x,y) = x \cdot e^x \cdot \frac{-1}{y^2} \Rightarrow f_y(1,2) = 1 \cdot e^1 \cdot \frac{-1}{2^2} = -\frac{e}{4}$

$$\Rightarrow D_v f(1,2) = \frac{3}{5} \cdot e - \frac{\cancel{4}^{1}}{5} \cdot \frac{e}{\cancel{4}_{1}} = \frac{2}{5} \cdot e$$

Esercizio 4

[4 punti]

Studiare la convergenza del limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-\cos(x)}{2x^2+y^2}$$

Risoluzione

Ponendo $y = m \cdot x$ risulta

$$\lim_{x \to 0} f(x, m \cdot x) = \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos(x)}{2x^2 + m^2 \cdot x^2}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos(x)}{(2+m^2) \cdot x^2} \xrightarrow{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2 \cdot (2+m^2)}$$

dipende da m $\Rightarrow \lim_{(x,y) \to (0,0)} f(x,y)$ non esiste.

Esercizio 5 **[6 punti]**

Trovare il dominio, eventuali zeri, asintoti e punti di estremo locale della funzione

$$f(x) = \left(2x^2 - x - 1\right) \cdot e^x$$

e tracciarne un grafico approssimativo.

Risoluzione

Dominio: $X = \mathbb{R}$.

Zeri: $f(x) = 0 \iff 2x^2 - x - 1 = 0$

$$\iff x = x_{0/1} = \frac{1 \pm \overbrace{\sqrt{1^2 + 4 \cdot 2 \cdot 1}}^{=3}}{2 \cdot 2} = \begin{cases} -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2} \\ \frac{4}{4} = 1 \end{cases}$$

Asintoti: $\cdot \lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \underbrace{x^2}_{\to +\infty} \cdot \underbrace{\left(2 - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right)}_{\to 1} \cdot \underbrace{e^x}_{\to +\infty} = (+\infty) \cdot 1 \cdot (+\infty) = +\infty$

Similmente segue $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty \Rightarrow$ non c'è un asintoto per $x \to +\infty$.

$\cdot \lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{2x^2 - x - 1}{e^{-x}} \overset{(H)}{=} \lim_{x \to -\infty} \frac{4x - 1}{-e^{-x}}$

$\overset{(H)}{=} \lim_{x \to -\infty} \frac{4}{e^{-x}} = \frac{4}{+\infty} = 0^+$

$\Rightarrow y = 0$ è un asintoto orizzontale per $x \to -\infty$.

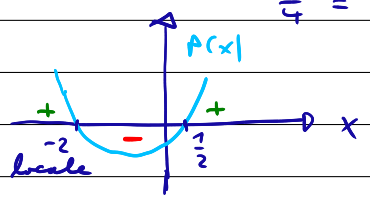
Estremi locali: · Gli unici candidati per punti di estremo locale sono i punti critici

$\cdot f'(x) = (4 \cdot x - 1) \cdot e^x + (2x^2 - x - 1) \cdot e^x = (2x^2 + 3x - 2) \cdot e^x$

$= 0 \iff p(x) := 2x^2 + 3x - 2 = 0$

$$\iff x_{2/3} = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 + 4 \cdot 2 \cdot 2}}{2 \cdot 2} = \frac{-3 \pm \sqrt{25}}{4} = \begin{cases} -\frac{8}{4} = -2 \\ \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Inoltre vale: segno $f'(x)$ = segno di $p(x)$ e $p(x)$ cambia segno in



$x_2 = -2$ da "+" a "−" $\Rightarrow x_2 = -2$ è un pto. di max. locale

$x_3 = \frac{1}{2}$ da "−" a "+" $\Rightarrow x_3 = \frac{1}{2}$ è un pto di min. locale

Grafico: