Analisi Matematica 1, Scritto A. Durata della prova: 2 ore **15.01.2020**

Firma: ....

Cognome .... **Nome** .... **A.A.** ....

Matricola .... **Corso di Laurea** ....

D1	
D2	
E1	
E2	
E3	
E4	
E5	
Σ	

Domanda 1

[4 punti]

(i) Dare la definizione di successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ decrescente.

(ii) Dare un esempio di una successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tale che $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$.

Risposta

(i) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è decrescente se $a_{n+1} \leq a_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$

(ii) P.e. per $a_n := n$ si ottiene

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$$

Domanda 2

[4 punti]

(i) Enunciare il teorema degli zeri.

(ii) Verificare che la funzione $f(x) = 7-(x+1)\cdot 2^x$ ammette uno zero nell'intervallo $[0,3]$.

Risposta

(i) Se $f \in C[a,b]$ e $f(a)\cdot f(b) < 0$, allora

$\exists\, c \in (a,b)$ t.c. $f(c) = 0$.

(per il teor. degli zeri)

(ii)
- f è continua in $[0,3]$
- $f(0) = 7-(0+1)\cdot 2^0 = 6 > 0$
- $f(3) = 7-(3+1)\cdot 2^3 = -25$

$\Rightarrow \exists\, c \in (0,3)$ t.c. $f(c) = 0$

Esercizio 1

[5 punti]

Studiare il carattere della serie

$$\mathcal{S} := \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{13+(n+1)!}{156+(n+2)!} =: a_n \geq 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$$

Risoluzione

- Per il principio di sostituzione segue

$$a_n \sim \frac{\cancel{(n+1)!}^{\,1}}{\underbrace{(n+2)!}_{=\cancel{(n+1)!}\cdot(n+2)}} = \frac{1}{n+2} \sim \frac{1}{n} \quad \text{per } n \to +\infty$$

- $\mathcal{S}$ è a termini positivi
- $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = +\infty$ diverge

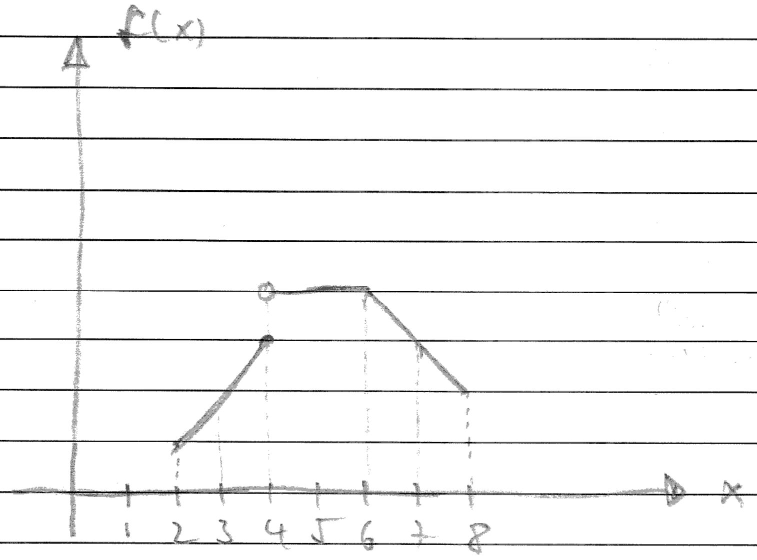
Quindi per il criterio del confronto asintotico anche la serie $\mathcal{S}$ diverge a $+\infty$

Esercizio 2

[5 punti]

Disegnare il grafico di una funzione $f : [2, 8] \to \mathbb{R}$ con $f'(3) = 1$, non continua in $x = 4$, con $f'(5) = 0$, con un punto angoloso in $x = 6$ e con $f'(7) = -1$.

Risoluzione



Esercizio 3

[5 punti]

Calcolare la derivata direzionale $D_v f(1,2)$ per la funzione $f(x,y) = xy^4 + x^4 y$ ed il versore $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$.

Risoluzione

$f_x(x,y) = y^4 + 4x^3 y \Rightarrow f_x(1,2) = 2^4 + 4 \cdot 2 = 24$

$f_y(x,y) = 4xy^3 + x^4 \Rightarrow f_y(1,2) = 4 \cdot 2^3 + 1 = 33$

Inoltre f è C^1 quindi differenziabile e per il teorema del gradiente segue

$D_v f(1,2) = v \cdot \operatorname{grad} f(1,2) = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 24 - \frac{33}{2}$

$= \underline{\underline{12 \cdot \sqrt{3} - \frac{33}{2}}}$

Esercizio 4

[4 punti]

Studiare il limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \underbrace{\frac{(\ln(1+x^6)) \cdot y^4}{x^{10} + y^{10}}}_{=: f(x,y)}$$

Risoluzione

Ponendo $y = mx$, $m \in \mathbb{R}$ si ottiene $\lim\limits_{x\to 0} f(x,mx) =$

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x^6) \cdot m^4 \cdot x^4}{x^{10} + m^{10} \cdot x^{10}} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x^6)}{x^6} \cdot \frac{m^4}{1+m^{10}}$

$= \frac{m^4}{1+m^{10}}$ dipende da m

$\Rightarrow \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ <u>non</u> esiste.

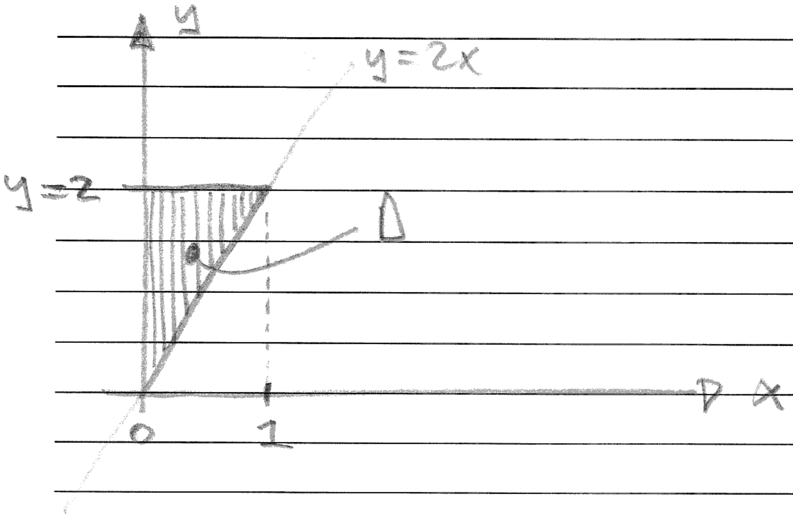
Esercizio 5

[5 punti]

Disegnare l'insieme $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1,\ 2x \leq y \leq 2\}$. Calcolare l'integrale

$$I := \iint_D \underbrace{4\,x^7 y}_{=:\, f(x,y)}\, dx dy.$$

Risoluzione



f è continua e D è y-semplice.

Quindi per il teorema di Fubini-Tonelli segue

$$I = \int_{x=0}^{1} \left(\int_{y=2x}^{2} 4x^7 \cdot y \, dy \right) dx = \int_0^1 4x^7 \left[\frac{y^2}{2} \right]_{y=2x}^{2} dx$$

$$= \int_0^1 2 \cdot x^7 \cdot (2^2 - (2x)^2)\, dx = \int_0^1 8 \cdot (x^7 - x^9)\, dx$$

$$= 8 \cdot \left[\frac{x^8}{8} - \frac{x^{10}}{10} \right]_0^1 = 8 \cdot \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{10} \right)$$

$$= 1 - \frac{8}{10} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$$