Analisi Matematica 1, Scritto B. Durata della prova: 2 ore 15.01.2020

Firma: ....

Cognome .... **Nome** .... **A.A.** ....

Matricola .... **Corso di Laurea** ....

D1	
D2	
E1	
E2	
E3	
E4	
E5	
Σ	

Domanda 1

[4 punti]

(i) Dare la definizione di successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ crescente.

(ii) Dare un esempio di una successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tale che $\lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty$.

Risposta

(i) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è crescente se $a_{n+1} \geq a_n \ \forall n \in \mathbb{N}$

(ii) P.e. per $a_n := -n$ segue

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty$$

Domanda 2

[4 punti]

(i) Enunciare il teorema degli zeri.

(ii) Verificare che la funzione $f(x) = (x+1)\cdot 3^x - 5$ ammette uno zero nell'intervallo $[0, 2]$.

Risposta

(i) Se $f \in C[a,b]$ e $f(a)\cdot f(b) < 0$, allora $\exists\ c \in (a,b)$ t.c. $f(c) = 0$.

per il teorema degli zeri

(ii)
- f è continua in $[0,2]$
- $f(0) = (0+1)\cdot 3^0 - 5 = -4 < 0$
- $f(2) = (2+1)\cdot 3^2 - 5 = 22 > 0$

$\Longrightarrow \exists\ c \in (0,2)$ t.c. $f(c) = 0$

Esercizio 1

[5 punti]

Studiare il carattere della serie

$$S := \sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{\frac{27+(n+2)!}{189+(n+3)!}}_{=:a_n}$$

Risoluzione

- Per il principio di sostituzione vale

$$a_n \sim \frac{\cancel{(n+2)!}^{\,1}}{\underbrace{(n+3)!}_{=\cancel{(n+2)!}\cdot(n+3)}} = \frac{1}{n+3} \sim \frac{1}{n} \quad \text{per } n \to +\infty$$

- S è a termini positivi
- $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = +\infty$ diverge

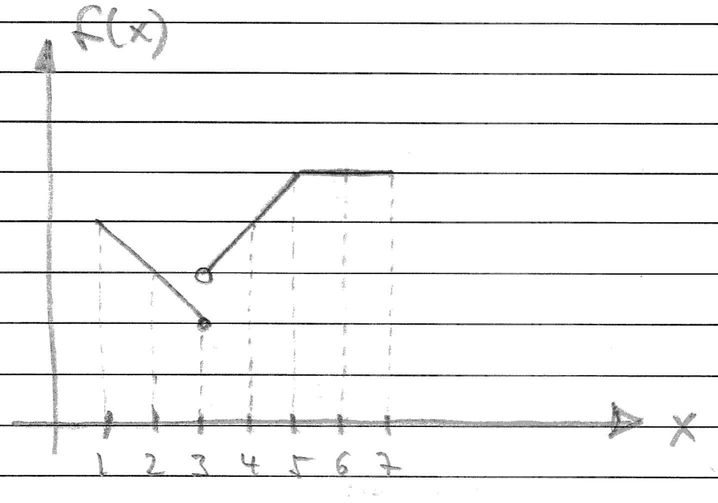
Quindi per il criterio del confronto asintotico anche la serie S diverge a $+\infty$.

Esercizio 2

[5 punti]

Disegnare il grafico di una funzione $f : [1,7] \to \mathbb{R}$ con $f'(2) = -1$, non continua in $x = 3$, con $f'(4) = 1$, con un punto angoloso in $x = 5$ e con $f'(6) = 0$.

Risoluzione



Esercizio 3

[5 punti]

Calcolare la derivata direzionale $D_v f(2,1)$ per la funzione $f(x,y) = xy^3 + x^3y$ ed il versore $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Risoluzione

$f_x(x,y) = y^3 + 3x^2 \cdot y \Rightarrow f_x(2,1) = 1 + 3 \cdot 2^2 = 13$

$f_y(x,y) = 3xy^2 + x^3 \Rightarrow f_y(2,1) = 3 \cdot 2 + 2^3 = 14$

Inoltre f è C^1 quindi differenziabile e per il teorema del gradiente segue

$D_v f(2,1) = v \cdot \text{grad} f(2,1) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 13 + \frac{1}{2} \cdot 14$

$= 7 - \sqrt{3} \cdot \frac{13}{2}$

Esercizio 4

[4 punti]

$=: f(x,y)$

Studiare il limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^6 \cdot \left(\ln(1+x)\right)^8}{x^{14} + y^{14}}$$

Risoluzione

Ponendo $y = mx$, $m \in \mathbb{R}$ segue

$\lim_{x\to 0} f(x, mx) = \lim_{x \to 0} \frac{m^6 \cdot x^6 \cdot (\ln(1+x))^8}{x^{14} + m^{14} \cdot x^{14}}$

$= \lim_{x\to 0} \left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right)^8 \cdot \frac{m^6}{1+m^{14}}$

$= \frac{m^6}{1+m^{14}}$ dipende da m

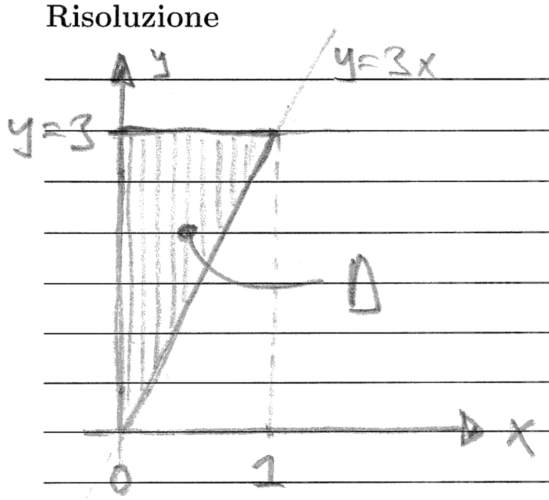
$\Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ non esiste

Esercizio 5 [5 punti]

Disegnare l'insieme $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1,\ 3x \leq y \leq 3\}$. Calcolare l'integrale

$$I := \iint_D \underbrace{x^5y^2}_{= f(x,y)}\,dxdy.$$

Risoluzione



f è continua e D è y-semplice

Quindi per il teorema di Fubini-Tonelli segue

$$I = \int_{x=0}^{1} \left(\int_{y=3x}^{3} x^5 \cdot y^2\, dy \right) dx = \int_0^1 x^5 \left[\frac{y^3}{3} \right]_{y=3x}^{3} dx$$

$$= \int_0^1 x^5 \cdot \frac{1}{3} \left(3^3 - (3x)^3 \right) dx$$

$$= \int_0^1 9x^5 (1 - x^3)\, dx$$

$$= 9 \cdot \int_0^1 x^5 - x^8\, dx = 9 \cdot \left[\frac{x^6}{6} - \frac{x^9}{9} \right]_0^1$$

$$= 9 \cdot \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{9} \right) = \frac{9}{6} - 1 = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$