Analisi Matematica 1, Scritto 1-A. Durata della prova: 2 ore 16.6.10

Firma: ....

Cognome: .... Nome: ....

Matricola: .... Corso di Laurea: .... Canale: A B C E-A 08/09

D1	
D2	
E1	
E2	
E3	
E4	
E5	
E6	
Σ	

Domanda 1

[2+3 punti]

(i) Dare la definizione di convergenza per una serie numerica.

(ii) Dare un esempio di una serie convergente con $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = 1$.

Risposta

(i) Sia $S_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$.

Allora si dice che $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge alla somma $S \in \mathbb{R}$

se $\lim_{n \to +\infty} S_n = S$.

(ii) La serie di Mengoli

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$$

Domanda 2

[2+3 punti]

(i) Dare la definizione di continuità per una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

(ii) Determinare quanti zeri ha la funzione $f(x) = x^5 + x - 1$ nell'intervallo $[-1, 1]$.

Risposta

(i) cfr. compito B

(ii) f è continua e $f(-1) = -1-1-1 = -3 < 0$, $f(1) = 1+1-1 = 1 > 0$, quindi per il teorema degli zeri f ammette uno zero in $[-1,1]$. Inoltre f è derivabile con $f'(x) = x^4 + 1 > 0 \ \forall x \Rightarrow f$ è strettamente crescente $\Rightarrow f$ è iniettiva, cioè ammette un'unico zero.

Esercizio 1

[3 punti]

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pari. Allora $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \cos(x) \cdot f(\sin(x))$

- [x] a è pari
- [ ] b è dispari
- [ ] c non è costante
- [ ] d non ha simmetric

Risoluzione

$g(-x) = \cos(-x) \cdot f(\sin(-x)) = \cos(x) \cdot f(-\sin(x)) = \cos(x) \cdot$

$= \cos(x) \cdot f(\sin(x)) = g(x) \Rightarrow g$ è pari

Esercizio 2

[3 punti]

La successione $\left(\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}\right)_{n\geq 1}$

- [ ] a è infinitesima
- [ ] b converge a 1
- [ ] c diverge
- [ ] d è indeterminata

Risoluzione

cfr. compito B

Esercizio 3

[3 punti]

Sia $f \in \mathrm{C}^1[0, +\infty)$ tale che $f(0) = 0$ e $f(x) \cdot f'(x) \leq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Allora f è

- [ ] a strettamente crescente
- [ ] b strettamente decrescente
- [x] c costante
- [ ] d nessuna delle precedente

Risoluzione

cfr. compito B (. $f = 0$)

Esercizio 4

[4 punti]

Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{3x \cdot \left(1-\cos\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\right)} = \sqrt{3/2}$$

Risoluzione

Poniamo $\frac{1}{\sqrt{x}} = t$. Quindi $x \to +\infty \iff t \to 0^+$ e

$$\sqrt{3x\left(1-\cos\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\right)} \underset{x=\frac{1}{t^2}}{=} \sqrt{3/t^2 \cdot (1-\cos(t))} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{\frac{1-\cos(t)}{t^2}}$$

$\frac{1-\cos(t)}{t^2} \to 1/2 \quad (t \to 0^+)$

$\to \sqrt{3/2}$ per $x \to +\infty \iff t \to 0^+$

Esercizio 5

[4 punti]

Trovare i punti critici di $f(x) = x - \ln(1+x^2)$ in $\mathbb{R}$ e classificarli.

Risoluzione

$$f'(x) = 1 - \frac{2x}{1+x^2} = \frac{1+x^2-2x}{1+x^2} = \frac{(1-x)^2}{1+x^2} = 0$$

$\iff x = 1$, cioè $x=1$ è l'unico pto. critico di f.

Inoltre $f'(x) > 0 \ \forall x \neq 1 \Rightarrow f$ è strettamente crescente $\Rightarrow x = 1$ è un pto. di sella e <u>non</u> un pto. di estremo locale

Esercizio 6

[5 punti]

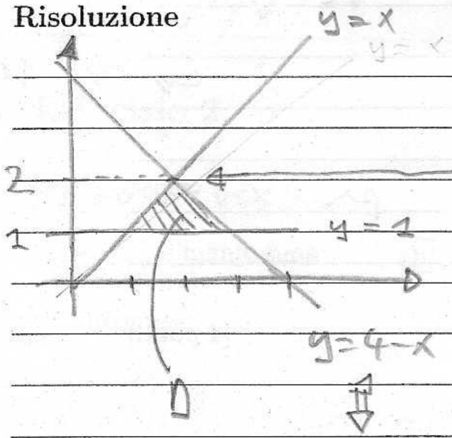
Disegnare la regione $D \subset \mathbb{R}^2$ delimitata dalle rette $y = 1$, $y = x$ e $y = 4 - x$ e calcolare

$$\iint_D \sin(x + y)\, dx\, dy. = I$$

In alternativa per i soli studenti immatricolati nel 2008/2009:

Calcolare, se converge, l'integrale improprio $\int_0^{+\infty} x^3 \cdot e^{-x^2}\, dx$.

Risoluzione



$x = 4 - x \iff x = 2 = y$

Quindi D è x-semplice:

$\Updownarrow$

$x = 4 - y$

$$D = \{(x,y) \mid y \in [1,2],\ y \leq x \leq 4-y\}$$

$$\overset{\text{Fubini}}{\underset{\text{Tonelli}}{\Longrightarrow}} I = \int_1^2 \int_y^{4-y} \sin(x+y)\, dx\, dy = \int_1^2 -\cos(x+y) \Big|_{x=y}^{x=4-y} dy$$

$$= \int_1^2 -\big(\cos(4) - \cos(2y)\big)\, dy =$$

$$= -\cos(4) + \tfrac{1}{2}\sin(2y)\Big|_1^2$$

$$= -\cos(4) + \tfrac{1}{2}\big(\sin(4) - \sin(2)\big)$$

per 2008/09 cfr. Compito B.