Analisi Matematica 1, Scritto 1-B. Durata della prova: 2 ore 16.6.10

Firma: ....

Cognome: .... Nome: ....

Matricola: .... Corso di Laurea: .... Canale: A B C E-A 08/09

D1	
D2	
E1	
E2	
E3	
E4	
E5	
E6	
Σ	

Domanda 1

[2+3 punti]

(i) Dare la definizione di divergenza a $+\infty$ per una serie numerica.

(ii) Dare un esempio di una serie divergente con $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = +\infty$.

Risposta

(i) Sia $S_n := a_0 + a_1 + \dots + a_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$.

Allora si dice che $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ diverge a $+\infty$, se

$\lim_{n \to +\infty} S_n = +\infty$

(ii) La serie armonica diverge a $+\infty$:

$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = +\infty$

Domanda 2

[2+3 punti]

(i) Dare la definizione di continuità per una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

(ii) Determinare quanti zeri ha la funzione $f(x) = 1 - x - x^5$ nell'intervallo $[-1, 1]$.

Risposta

(i) f si dice continua in $x_0 \in \mathbb{R}$ se $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$

t.c. $|f(x_0) - f(x)| < \varepsilon \ \forall x \in \mathbb{R}$ con $|x - x_0| < \delta$.

f si dice continua se è continua in ogni $x_0 \in \mathbb{R}$.

(ii) $f(-1) = 1 + 1 + 1 = 3 > 0$ $f(1) = 1 - 1 - 1 = -1 < 0$
Inoltre f è continua e quindi per il teorema degli zeri $\exists$ almeno uno zero di f in $[-1, 1]$. Infine, f è derivabile con $f'(x) = -1 - x^4 < 0 \ \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f$ è strettamente decrescente $\Rightarrow f$ ammette al massimo uno zero. Di conseguenza $\exists$ un unico zero di f in $[-1, 1]$.

Esercizio 1

[3 punti]

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pari. Allora $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \sin(x) \cdot f(\cos(x))$

[a] è pari ~~[b]~~ è dispari [c] non è costante [d] non ha simmetrie

Risoluzione

$g(-x) = \sin(-x) \cdot f(\cos(-x)) = -\sin(x) \cdot f(\cos(x)) = -g(x)$

$\Rightarrow g$ è dispari

Esercizio 2

[3 punti]

La successione $\left(\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}\right)_{n \geq 1}$

[a] diverge [b] è indeterminata ~~[c]~~ converge a 1 [d] è infinitesima

Risoluzione

$(1/n)^{1/n} = \dfrac{1}{\sqrt[n]{n}} \to \dfrac{1}{1} = 1$ per $n \to +\infty$

$\sqrt[n]{n} \to 1$ (limite notevole)

Esercizio 3

[3 punti]

Sia $f \in C^1[0, +\infty)$ tale che $f(0) = 0$ e $f(x) \cdot f'(x) \leq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Allora f è

[a] strettamente decrescente ~~[b]~~ $f = 0$
[c] strettamente crescente [d] nessuna delle precedente

Risoluzione

$f'(x) \cdot f(x) = \left(\frac{1}{2} \cdot f^2(x)\right)'$. Quindi $\frac{1}{2} \cdot f^2(x)$ è decrescente $\Rightarrow f^2(x)$ è decrescente. Inoltre $f^2(0) = 0^2 = 0$ e $f^2(x) \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow f(x) = 0 \ \forall x \geq 0.$

Esercizio 4

[4 punti]

Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x \cdot (1-\cos(\tfrac{2}{\sqrt{x}}))} = \sqrt{2}$$

Risoluzione

Poniamo $t = \frac{2}{\sqrt{x}}$. Allora $x \to +\infty \Leftrightarrow t \to 0^+$. Inoltre

$$\sqrt{x \cdot (1-\cos(\tfrac{2}{\sqrt{x}}))} \underset{\substack{\uparrow \\ x=\left(\frac{2}{t}\right)^2=\frac{4}{t^2}}}{=} \sqrt{\frac{4}{t^2}\cdot(1-\cos(t))} = 2 \cdot \sqrt{\frac{1-\cos(t)}{t^2}} \to \frac{1}{2}$$

per $t \to 0^+$

$$\to 2 \cdot \sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$$

Esercizio 5

[4 punti]

Trovare i punti critici di $f(x) = x + \ln(1+x^2)$ in $\mathbb{R}$ e classificarli.

Risoluzione

$$f'(x) = 1 + \frac{2x}{1+x^2} = \frac{1+x^2+2x}{1+x^2} = \frac{(1+x)^2}{1+x^2} = 0$$

$\Leftrightarrow x = -1$

Quindi $x = -1$ è l'unico pto. critico di f.

Inoltre $f'(x) > 0 \quad \forall x \neq -1 \Rightarrow f$ è strettamente crescente $\Rightarrow x = -1$ è un pto. di sella e <u>non</u> un pto. di estremo locale

Esercizio 6

[5 punti]

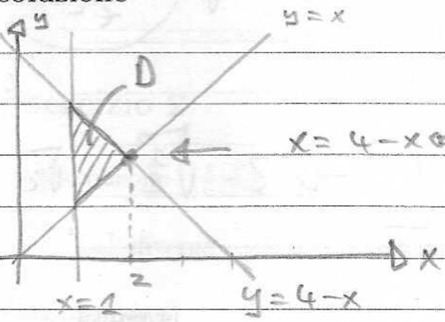
Disegnare la regione $D \subset \mathbb{R}^2$ delimitata dalle rette $y = x$, $x = 1$ e $y = 4 - x$ e calcolare

$$\iint_D \cos(x + y)\, dx\, dy. = I$$

<u>**In alternativa per i soli studenti immatricolati nel 2008/2009:**</u>

Calcolare, se converge, l'integrale improprio $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^3 \cdot e^{-x^2}\, dx$.

Risoluzione



$x = 4 - x \iff 2x = 4 \iff x = 2$

Quindi, D è y-semplice con

$D = \{(x,y) \mid x \in [1,2],\ x \leq y \leq 4-x\}$

Fubini ⟹ Tonelli

$$I = \int_1^2 \int_x^{4-x} \cos(x+y)\, dy\, dx = \int_1^2 \sin(x+y)\Big|_{y=x}^{y=4-x} dx =$$

$$= \int_1^2 (\sin(4) - \sin(2x))\, dx = \sin(4) + \frac{1}{2}\cos(2x)\Big|_1^2$$

$$= \sin(4) + \frac{1}{2}(\cos(4) - \cos(2)).$$

2008/09: Calcoliamo prima una primitiva di $x^3 \cdot e^{-x^2}$:

$$\int x^3 \cdot e^{-x^2} dx = \frac{1}{2}\int x^2 \cdot e^{-x^2} \cdot 2x\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \underbrace{t \cdot e^{-t}}_{f \cdot g'}\, dt = \frac{1}{2}\Big[\underbrace{t \cdot (-e^{-t})}_{f \cdot g} - \int \underbrace{1}_{f'} \cdot (-e^{-t})\, dt\Big]$$

int. per parti

sost.: $x^2 = t \Rightarrow$
$dt/dx = 2x \Rightarrow$
$2x\,dx = dt$

$$= \frac{1}{2}\left[-te^{-t} - e^{-t}\right] + c = -\frac{1}{2}(t+1)e^{-t} = -\frac{1}{2}(x^2+1)\cdot e^{-x^2}$$

Quindi risulta $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^3 e^{-x^2} dx = \lim_{b \to +\infty} \int_0^b x^3 \cdot e^{-x^2} dx$

$$= \lim_{b \to +\infty}\left[-\frac{1}{2}(x^2+1)e^{-x^2}\right]_0^b = -\frac{1}{2}\left((b^2+1)e^{-b^2} - (0^2+1)\cdot e^{-0^2}\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\cdot(-1) = \underline{\underline{1/2}}$$