16.2.21

Domanda 1

[4 punti]

(i) Dare la definizione di convergenza di una successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ al limite $l \in \mathbb{R}$.

(ii) Dare l'esempio di una successione convergente al limite $l = e^\pi$.

Sol. i) $\lim_{n\to+\infty} x_n = e \iff \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ t.c. $|x_n - e| < \varepsilon \quad \forall\, n \geq n_0$.

ii) P.e., se $x_n := e^\pi + \frac{1}{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$ allora $\lim_{n\to+\infty} x_n = e^\pi$.

Domanda 2

[4 punti]

(i) Enunciare il teorema di Fermat.

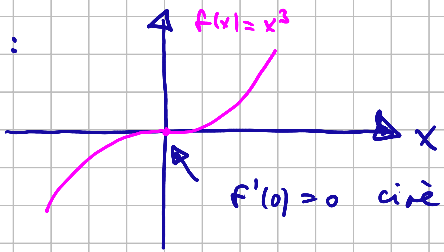
(ii) Dare un esempio di un punto critico di una funzione f che *non* sia un punto di estremo locale.

Sol. i) Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ammette estremo locale in $x_0 \in (a,b)$ ed è derivabile in x_0, allora $f'(x_0) = 0$ (cioè x_0 è un punto critico della funzione f).

ii) Sia $f(x) := x^3$ per $x \in \mathbb{R}$. Allora $f'(x) = 3x^2$ e quindi $f'(0) = 0$, cioè $x_0 = 0$ è un punto critico di f. Però

- $f(x) > 0 = f(0)\ \forall\, x > 0 \Rightarrow x_0$ non è un pto. di max locale
- $f(x) < 0 = f(0)\ \forall\, x < 0 \Rightarrow x_0$ non è un pto. di min locale

Graficamente:



$f'(0) = 0$ cioè la retta tangente è orizzontale

Esercizio 1

[5 punti]

Studiare la convergenza della serie $\sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{n \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^{(n^2)}}_{=:\, a_n} =: S$

Sol. La serie S è a termini positivi. Applicando il criterio della radice segue:

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{n} \cdot \left(\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}\right)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{n} \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$$

$$= \sqrt[n]{n} \cdot \frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = \underbrace{\sqrt[n]{n}}_{\to 1} \cdot \frac{1}{\underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}_{\to e}} \to 1 \cdot \frac{1}{e} = \frac{1}{e} = q$$

per $n \to +\infty$

Visto che $q = \frac{1}{e} < 1$ la serie S converge.

Esercizio 2

[5 punti]

Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{(x^2)} - x \cdot \ln(1+3x) - \cos(2x)}{x \cdot \sin(x^2)}$$

Sol: • $\sin(t) \sim t$ per $t \to 0$ $\Rightarrow$ $\sin(x^2) \sim x^2$ per $x \to 0$

$\Rightarrow$ $x \cdot \sin(x^2) \sim x^3$ per $x \to 0$.

• Il numeratore è quindi da sviluppare fino al 3° ordine:

$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + o(t^2)$ per $t \to 0$

$\Rightarrow e^{x^2} = 1 + x^2 + \frac{(x^2)^2}{2} + o((x^2)^2)$ $\quad$ $\frac{(x^2)^2}{2} = \frac{x^4}{2} = o(x^3)$ $\quad$ $o((x^2)^2) = o(x^4) = o(x^3)$

$= 1 + x^2 + o(x^3)$ per $x \to 0$

• $\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + o(t^2)$ per $t \to 0$

$\Rightarrow$ $\ln(1+3x) = 3x - \frac{(3x)^2}{2} + o((3x)^2)$

$= 3x - \frac{9}{2}x^2 + o(x^2)$

$\Rightarrow$ $x \cdot \ln(1+3x) = 3x^2 - \frac{9}{2}x^3 + x \cdot o(x^2)$

$= 3x^2 - \frac{9}{2}x^3 + o(x^3)$ per $x \to 0$

• $\cos(t) = 1 - \frac{t^2}{2} + o(t^3)$

$\Rightarrow$ $\cos(2x) = 1 - \frac{(2x)^2}{2} + o((2x)^3)$

$= 1 - 2x^2 + o(x^3)$ per $x \to 0$

Quindi:

$e^{x^2} - x \cdot \ln(1+3x) - \cos(2x) = \cancel{1} + \cancel{x^2} - (3\cancel{x^2} - \frac{9}{2}x^3) - (\cancel{1} - \cancel{2x^2}) + o(x^3)$

$= \frac{9}{2}x^3 + o(x^3) \sim \frac{9}{2}x^3$ per $x \to 0$

$\Rightarrow$ $\frac{e^{x^2} - x \cdot \ln(1+3x) - \cos(2x)}{x \cdot \sin(x^2)} \sim \frac{\frac{9}{2}x^3}{x^3} = \frac{9}{2}$ per $x \to 0$

$\Rightarrow$ $\lim \frac{e^{x^2} - x \cdot \ln(1+3x) - \cos(2x)}{x \cdot \sin(x^2)} = \frac{9}{2}$

Esercizio 3

[5 punti]

Calcolare, se converge, l'integrale improprio

$$\int_e^{+\infty} \frac{1}{x \cdot (\ln(3x))^2}\, dx =: I$$

Sol. Si usa la sostituzione $\ln(3x) = t$ $\Rightarrow$ $\frac{dt}{dx} = \frac{1}{3x} \cdot 3 = \frac{1}{x}$.

$\Rightarrow$ $\frac{1}{x} \cdot dx = dt$

Quindi risulta

$$\int \frac{1}{x\cdot \ln^2(3x)}\,dx = \int \underbrace{\frac{1}{t^2}}_{=t^{-2}}\,dt = \frac{t^{-2+1}}{-2+1} = -t^{-1} = -\frac{1}{t} = -\frac{1}{\ln(3x)}$$

e di conseguenza $\forall\, b > e$

$$\int_e^b \frac{1}{x\cdot\ln^2(3x)}\,dx = \left[-\frac{1}{\ln(3x)}\right]_e^b = \frac{1}{\ln(3e)} - \frac{1}{\ln(3b)}$$

$\ln(3b) \to \ln(+\infty) = +\infty$, $\frac{1}{+\infty} = 0$

$$\to \frac{1}{\ln(3e)} = \frac{1}{\ln(3)+\ln(e)} = \frac{1}{1+\ln(3)}$$

per $b \to +\infty$

Quindi l'integrale converge a $I = \dfrac{1}{1+\ln(3)}$.

Esercizio 4 [4 punti]

Calcolare l'equazione del piano tangente al grafico di $f(x,y) = \ln\big(2+\sin(xy)\big)$ nel punto $(x_0, y_0) = (1, \pi)$.

Sol: • L'equazione del piano tangente è

$$z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0,y_0)\cdot(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)\cdot(y-y_0)$$

• $f(x_0, y_0) = \ln(2 + \underbrace{\sin(1\cdot\pi)}_{=0}) = \ln(2)$

• $f_x(x,y) = \dfrac{1}{2+\sin(xy)}\cdot\cos(xy)\cdot y \Rightarrow f_x(x_0,y_0) = \dfrac{\overbrace{\cos(1\cdot\pi)}^{=-1}}{2+\underbrace{\sin(1\cdot\pi)}_{=0}}\cdot\pi = -\dfrac{\pi}{2}$

• $f_y(x,y) = \dfrac{1}{2+\sin(xy)}\cdot\cos(xy)\cdot x \Rightarrow f_y(x_0,y_0) = \dfrac{\cos(1\cdot\pi)}{2+\sin(1\cdot\pi)}\cdot 1 = -\dfrac{1}{2}$

Quindi risulta $p(x,y) = \ln(2) - \frac{\pi}{2}\cdot(x-1) - \frac{1}{2}\cdot(y-\pi)$

Esercizio 5 [5 punti]

Studiare continuità, derivabilità e differenziabilità in $(x_0, y_0) = (0,0)$ della funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ data da

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3\cdot y}{x^4+y^4} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Sol. • Studiamo per $m \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x\to 0} f(x, mx) = \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x^3}\cdot m\cancel{x}}{\underbrace{\cancel{x^4}}_{1} + m^4\cdot\underbrace{\cancel{x^4}}_{1}} = \frac{m}{1+m^4}.$$

Quindi $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ non esiste

$\Rightarrow$ f <u>non</u> è continua in $(0,0)$

$\Rightarrow$ f <u>non</u> è differenziabile in $(0,0)$.

- Visto che $f(x,0) = 0 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$ risulta

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} = 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$$

Similmente, visto che $f(0,y) = 0 \quad \forall\, y \in \mathbb{R}$ segue

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(0,0+h) - f(0,0)}{h} = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) .$$

Quindi f è derivabile in $(0,0)$ con $\operatorname{grad} f(0,0) = (0,0)$.