Analisi Matematica 1, Scritto 1-A. Durata della prova: 2 ore 16.7.12

Firma: ....

Cognome: .... **Nome:** ....

Matricola: .... **Corso di Laurea:** .... **Canale:** [A] [B] [C] [D]

D1	
D2	
E1	
E2	
E3	
E4	
E5	
Σ	

Domanda 1

[3 punti]

(i) Dare la definizione di derivata parziale $f_x(x, y)$ per una funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

(ii) Dire se esiste una funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ che è derivabile parzialmente ma non continua in $(0, 0)$. (Giustificare la risposta).

Risposta

(i) $f_x(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$ se $\exists$ finito

(ii) Sì, p.e.

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x \cdot y}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Allora f è zero sugli assi x e y e quindi derivabile parz. in $(0,0)$ con $f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$. Però per $x = y$ si ottiene $\lim_{x \to 0} f(x,x) = \frac{1}{2} \neq f(0,0) = 0$ e di conseguenza f non è continua in $(0,0)$.

Domanda 2

[3 punti]

Sia $f \in C[a, b]$ tale che $f(a) \cdot f(b) > 0$. Allora

[a] f è costante

[b] $f(x) > 0$ per ogni $x \in [a, b]$

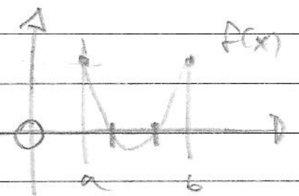
☒ [c] l'insieme $\{e^{f(x)} : x \in [a, b]\}$ ammette minimo

[d] non esiste $c \in [a, b]$ tale che $f(c) = 0$

Risposta

La funzione composta $g = e^f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $g(x) = e^{f(x)}$ è continua, quindi per il teorema di Weierstraß ammette minimo (e massimo) sull'intervallo chiuso, limitato $[a,b]$.

!! $\boxed{\text{N.B.:}}$ La risposta d) è sbagliata!!



$\Rightarrow f(a) \cdot f(b) > 0$ ma $\exists c$ con $f(c) = 0$!

Esercizio 1

[3 punti]

Studiare il comportamento della serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{-\frac{n^2}{2}} =: a_n$

Risoluzione

Applichiamo il criterio della radice ($a_n > 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$):

$$\sqrt[n]{a_n} = \left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^{-\frac{n^2}{2}}\right)^{1/n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{-n/2} = \left(\underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}}_{\to e \text{ per } n \to +\infty}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

Quindi $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}} = q < 1$

$\Rightarrow$ la serie converge.

Esercizio 2

[4 punti]

Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to 0^+} \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{x}\cdot \ln x}\right) =: \ell \quad = -\pi/2$$

Risoluzione

Visto che $\lim_{x\to 0^+} \overbrace{\underbrace{\sqrt{x}}_{>0} \cdot \underbrace{\ln(x)}_{<0 \text{ se } x<1}}^{<0 \text{ se } x<1} = 0^-$ (vedi appunti) segue ⊛

$$\ell = \arctan\left(\frac{1}{0^-}\right) = \arctan(-\infty) = -\pi/2$$

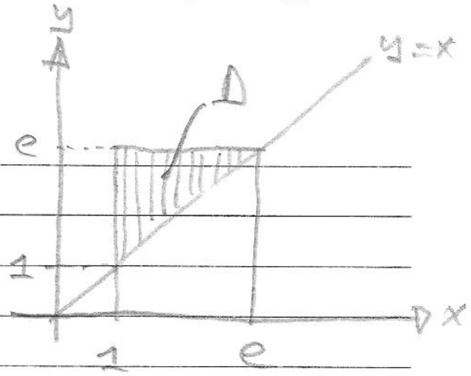
⊛ usando la continuità della funzione arctan.

Esercizio 3

[4 punti]

Disegnare il dominio $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq e,\ x \leq y \leq e\}$ e calcolare l'integrale doppio

$$I := \iint_D \frac{1}{x \cdot y}\, dx\, dy$$



Risoluzione

Il dominio D è y-semplice e la funz. integranda è continua, quindi per Fubini-Tonelli segue

$$I = \int_1^e \int_{y=x}^{y=e} \frac{1}{x \cdot y}\, dy\, dx = \int_1^e \frac{1}{x} \cdot \ln(y) \Big|_{y=x}^{y=e} dx$$

$$= \int_1^e \frac{1}{x} \cdot (\overbrace{\ln(e)}^{=1} - \ln(x))\, dx = \ln(x)\Big|_1^e - \int_1^e \underbrace{\frac{1}{x}}_{f'} \cdot \underbrace{\ln(x)}_{f}\, dx$$

$$\overset{(*)}{=} (\overbrace{\ln(e)}^{=1} - \overbrace{\ln(1)}^{=0}) - \frac{\ln^2(x)}{2}\Big|_1^e = 1 - \frac{\ln^2(e) - \ln^2(1)}{2} = \frac{1}{2}$$

(*) Si usa $\int f \cdot f' = \frac{f^2}{2} + c$. In alternativa si può usare la sostituzione $\ln(x) = t \Rightarrow \frac{dt}{dx} = \frac{1}{x}$ cioè $\frac{dx}{x} = dt$.

Esercizio 4

[4 punti]

Data $f(x,y) = \dfrac{x}{x+y}$, trovare un versore $v \in \mathbb{R}^2$ tale che la derivata direzionale $D_v f(2,-1) = 1$.

Risoluzione

Visto che $f \in C^1$ è differenziabile e quindi si può applicare il teor. del grad. e le: $D_v f(2,-1) = v \cdot \nabla f(2,-1)$.

Perciò calcoliamo $\nabla f(x,y) = \ldots = \left(\frac{y}{(x+y)^2}, \frac{-x}{(x+y)^2}\right) \Rightarrow$

$\nabla f(2,-1) = (-1,-2)$. Quindi cerchiamo un versore $v = (v_1, v_2)$ t.c. $\underset{\displaystyle -v_1 - 2v_2}{\underset{\parallel}{v \cdot (-1,-2)}} \overset{!}{=} 1$

$\Rightarrow$ p.e. $v = (-1, 0)$.

Esercizio 5

[5 punti]

Studiare la funzione $f(x) = \sqrt{\frac{x^2-3}{x-2}}$ (senza calcolare $f''(x)$) e tracciarne un grafico approssimativo.

Risoluzione

Dominio: $x \in$ dom. di $f \iff \begin{cases} \frac{x^2-3}{x-2} \geq 0 \\ x-2 \neq 0 \iff x \neq \pm\sqrt{2} \end{cases}$. Ora x^2-3 cambia segno in $x = \pm\sqrt{3}$, $x-2$ in $x=2$. Inoltre per x grande, $\frac{x^2-3}{x-2} > 0$. Quindi

$-\ \ +\ \ -\ \ +$ ($-\sqrt{3}$, $\sqrt{3}$, 2) $\to x \Rightarrow$ dom. di $f = [-\sqrt{3}, \sqrt{3}] \cup (2, +\infty) =: D$

Simmetrie: non ci sono. Segno: $f(x) \geq 0 \ \forall x \in D$

Zeri: $f(x) = 0 \iff x^2-3=0 \iff x = \pm\sqrt{3}$.

Limiti agli estremi di D: $\lim_{x\to\pm\sqrt{3}^{\mp}} f(x) = 0$, $\lim_{x\to 2^+} f(x) = +\infty \Rightarrow x=2$ è un asintoto verticale.

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ però $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0 \Rightarrow$ non c'è un asintoto obliquo per $x \to +\infty$.

Studio di f':

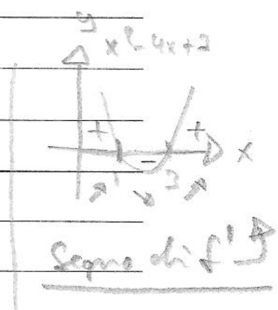
$$f'(x) = \left[\left(\frac{x^2-3}{x-2}\right)^{1/2}\right]' = \frac{1}{2}\left(\frac{x^2-3}{x-2}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{(x-2)\cdot 2x - 1\cdot(x^2-3)}{(x-2)^2}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{2x^2-4x-x^2+3}{(x-2)^2 \cdot \sqrt{\frac{x^2-3}{x-2}}} = \frac{1}{2}\frac{x^2-4x+3}{(x-2)^2\cdot\sqrt{\frac{x^2-3}{x-2}}} \Rightarrow$$

>0 in D

$\sqrt{\Delta}=2$

$$f'(x) = 0 \iff x^2-4x+3 = 0 \iff x = \frac{4 \pm \sqrt{16-4\cdot 3}}{2} = \begin{cases} 3 \\ 1 \end{cases}$$



Segno di f'

Inoltre, $f'(x)$ cambia segno in
- $x = 3$ da "$-$" a "$+$"
- $x = 1$ da "$+$" a "$-$"

$\Rightarrow x = 3$ è un pto di min. loc.
$x = 1$ è un pto di max. loc.

& $f(3) = \sqrt{6} \simeq 2{,}4$.
$f(1) = \sqrt{2} \simeq 1{,}4$.
$f(0) = \sqrt{3/2}$