Analisi Matematica 1, Scritto 1-B. Durata della prova: 2 ore 16.7.12

Firma: ....

Cognome: .... **Nome:** ....

Matricola: .... **Corso di Laurea:** .... **Canale:** [A] [B] [C] [D]

D1	
D2	
E1	
E2	
E3	
E4	
E5	
Σ	

Domanda 1

[3 punti]

(i) Dare la definizione di derivata parziale $f_y(x,y)$ per una funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

(ii) Dire se esiste una funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ che è continua ma non derivabile parzialmente in $(0,0)$. (Giustificare la risposta).

Risposta

(i) $f_y(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0, y_0+h) - f(x_0, y_0)}{h}$ se $\exists$ finito

(ii) → Sì, esiste, p.e. $f(x,y) = |x+y|$ è continua ma non derivabile parzialmente (rispetto a x e a y) in $(0,0)$.

Domanda 2

[3 punti]

Sia $f \in C(\mathbb{R})$ tale che $f(a) \cdot f(b) > 0$. Allora

[a] non esiste $c \in [a,b]$ tale che $f(c) = 0$

[b] l'insieme $\{f(e^x) : x \in [a,b]\}$ ammette massimo

[c] f è costante

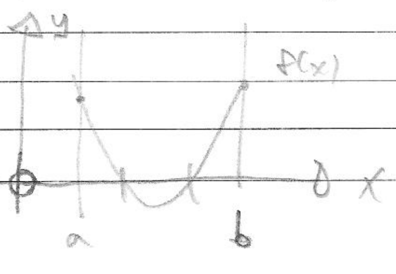
[d] $f(x) < 0$ per ogni $x \in [a,b]$

Risposta

La funzione composta $g : [a,b] \to \mathbb{R}$, $g(x) = f(e^x)$ è continua e quindi per Weierstraß ammette massimo (e minimo) sul intervallo chiuso limitato $[a,b]$.

!! $\boxed{\text{N.B.}}$ La risposta a) è sbagliata!!

P.e.



$f(a) \cdot f(b) > 0$ ma $\exists c$ con $f(c) = 0$!!

Esercizio 1

[3 punti]

Studiare il comportamento della serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n-1}{n}\right)^{-\frac{n^2}{2}}$ $=: a_n$

Risoluzione

Utilizziamo il criterio della radice ($a_n > 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$):

$$\sqrt[n]{a_n} = \left(\left(\frac{n-1}{n}\right)^{-n^2/2}\right)^{1/n} = \left(\frac{n-1}{n}\right)^{-n/2} = \left(\frac{1}{\underbrace{(1-1/n)^n}_{\to e^{-1} \text{ per } n\to+\infty}}\right)^{1/2}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \sqrt{\frac{1}{e^{-1}}} = \sqrt{e} = q > 1$$

$\Rightarrow$ la serie diverge a $+\infty$.

Esercizio 2

[4 punti]

Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to+\infty} \arctan\left(1 + \frac{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{x}}\right) = \pi/4$$

Risoluzione

Visto che $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} = 0$ (vedi appunti) segue

(usando la continuità della funzione arctan)

$$\arctan\left(1 + \frac{\ln(1/x)}{\sqrt{x}}\right) = \arctan\Big(1 - \underbrace{\frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}}_{\to 0 \text{ per } x\to+\infty}\Big)$$

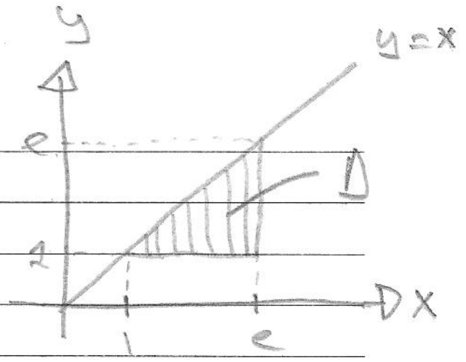
$\to \arctan(1) = \pi/4$ per $x \to +\infty$

Esercizio 3

[4 punti]

Disegnare il dominio $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \le x \le e,\ 1 \le y \le x\}$ e calcolare l'integrale doppio

$$I = \iint_D \frac{x}{y}\, dx\, dy$$



Risoluzione

D è semplice e la funzione integranda è continua. Quindi si può applicare Fubini-Tonelli per calcolare

$$I = \int_1^e \int_{y=1}^{y=x} \frac{x}{y}\, dy\, dx = \int_1^e x \cdot \ln(y)\Big|_{y=1}^{y=x} dx$$

$$= \int_1^e x \cdot (\ln(x) - \underbrace{\ln(1)}_{=0})\, dx = \int_1^e \underbrace{x}_{f'} \cdot \underbrace{\ln(x)}_{g}\, dx \overset{\text{int. per parti}}{=} \underbrace{\frac{x^2}{2} \cdot \ln(x)}_{f \cdot g}\Big|_1^e - \int_1^e \underbrace{\frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x}}_{f \cdot g' \,=\, \frac{x}{2}}\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\left(e^2 \cdot \underbrace{\ln(e)}_{=1} - 1^2 \cdot \underbrace{\ln(1)}_{=0}\right) - \frac{x^2}{4}\Big|_1^e = \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4}$$

$$= \frac{e^2 + 1}{4}$$

Esercizio 4

[4 punti]

Data $f(x,y) = \dfrac{y}{x-y}$, trovare un versore $v \in \mathbb{R}^2$ tale che la derivata direzionale $D_v f(2,1) = 2$.

Risoluzione

La funzione f è C^1, quindi $D_v f(x,y) = \nabla f(x,y) \cdot v$ per il teorema del gradiente. Perciò calcoliamo

$\nabla f(x,y) = \ldots = \left(\dfrac{-y}{(x-y)^2}, \dfrac{x}{(x-y)^2}\right) \Rightarrow \nabla f(2,1) = (-1, 2)$.

Quindi cerchiamo un versore $v = (v_1, v_2)$ t.c.

$$\underbrace{(-1,2) \cdot (v_1, v_2)}_{= -v_1 + 2v_2} \overset{!}{=} 2 \Rightarrow \text{p.e., } v = (0,1)$$

Esercizio 5

[5 punti]

Studiare la funzione $f(x) = \sqrt{\frac{x-3}{x^2-5}}$ (senza calcolare $f''(x)$) e tracciarne un grafico approssimativo.

Risoluzione

Dominio: $x \in \text{dom di } f \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x-3}{x^2-5} \geq 0 \text{ e} \\ x^2-5 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \pm\sqrt{5} \end{cases}$. Ora $x-3$ cambia segno in $x=3$ e x^2-5 in $x=\pm\sqrt{5}$. Inoltre per x grande, $\frac{x-3}{x^2-5} > 0$.

Quindi risulta: $- \quad -\sqrt{5} \quad + \quad \sqrt{5} \quad - \quad 3 \quad +$ $\Rightarrow$ dom. di $f = (-\sqrt{5}, \sqrt{5}) \cup [3, +\infty) =: D$.

Simmetrie: non ci sono. Segno: $f(x) \geq 0 \ \forall x \in D$.

Zeri: $f(x) = 0 \Leftrightarrow x-3=0 \Leftrightarrow x=3$.

Limiti agli estremi: $\lim_{x\to\pm\sqrt{5}^{\mp}} f(x) = +\infty \Rightarrow x = \pm\sqrt{5}$ sono asintoti verticali.

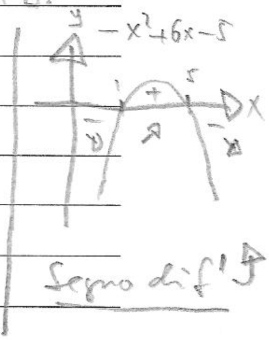
$\lim_{x\to 3^+} f(x) = 0$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0 \Rightarrow y=0$ è un asintoto orizzontale per $x\to+\infty$.

Studio di f':

$$f'(x) = \left(\left(\frac{x-3}{x^2-5}\right)^{1/2}\right)' = \frac{1}{2}\left(\frac{x-3}{x^2-5}\right)^{-1/2} \cdot \frac{(x^2-5)\cdot 1 - 2x\cdot(x-3)}{(x^2-5)^2}$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{x^2-5-2x^2+6x}{(x^2-5)^2\sqrt{\frac{x-3}{x^2-5}}} = \frac{1}{2}\,\frac{-x^2+6x-5}{(x^2-5)^2\sqrt{\frac{x-3}{x^2-5}}} \quad > 0 \ \forall x \in D.$$

$\Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow -x^2+6x-5=0 \Leftrightarrow x = \frac{-6\pm\overbrace{\sqrt{36-20}}^{=4}}{-2} = \begin{cases}1\\5\end{cases}$



Inoltre, $f'(x)$ cambia segno in
- $x=1$ da "$-$" a "$+$"
- $x=5$ da "$+$" a "$-$"

$\Rightarrow x=1$ è un pto. di min. loc.
$x=5$ è un pto. di max. loc.

e $f(1) = \sqrt{1/2} \approx 0,7$.
$f(5) = \sqrt{1/10} \approx 0,3$.