Analisi Matematica 1. Durata della prova: 2 ore **17.1.22**

Cognome .... **Nome** ....

Matricola .... **Corso di Laurea:** Ingegneria dell'Informazione

Firma: ....

D1	
D2	
E1	
E2	
E3	
E4	
E5	
Σ	

Domanda 1

[4 punti]

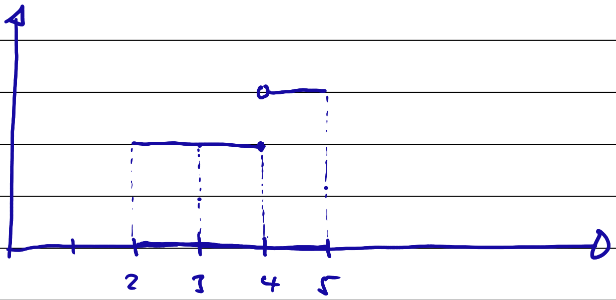
(i) Dare la definizione di funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua in $x = 3$.

(ii) Disegnare il grafico di una funzione $f : [2, 5] \to \mathbb{R}$ continua in $x = 3$ e non continua in $x = 4$.

Risposta

(i) f è continua in $x=3$ se $\forall$ successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con $\lim_{n\to+\infty} x_n = 3$ segue che $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f(3)$.

(ii)



Domanda 2

[4 punti]

(i) Enunciare il teorema di Lagrange.

(ii) Calcolare i punti di Lagrange della funzione $f : [-1, 2] \to \mathbb{R}$, $f(x) := x^3 + 3x + 1$.

Risposta

(i) Se $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ è continua e derivabile in (a,b), allora $\exists\ c \in (a,b)$ t.c.

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

(ii) • f è derivabile in $[-1,2]$.

• $f(-1) = (-1)^3 + 3\cdot(-1) + 1 = -3$, $f(2) = 2^3 + 3\cdot 2 + 1 = 15$

$$\Rightarrow \frac{f(2) - f(-1)}{2-(-1)} = \frac{15-(-3)}{3} = \frac{18}{3} = 6$$

• $f'(x) = 3x^2 + 3$. Quindi cerchiamo $c \in (-1,2)$ t.c.

$$3c^2 + 3 = 6 \iff c^2 + 1 = 2 \iff c^2 = 1$$
$$\iff c = \pm 1$$

<u>N.B:</u> solo <u>$c = +1$</u> verifica $c \in (-1,2)$.

Esercizio 1

[4 punti]

Studiare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} 3^{-n}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2+2} =: a_n > 0 \quad \forall n\in\mathbb{N}$$

Risoluzione

Si usa il criterio della radice:

$$\sqrt[n]{a_n} = 3^{-1}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{n^2+2}{n}} = \frac{1}{3}\cdot\underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}_{\to e}\cdot\left(\underbrace{1+\frac{1}{n}}_{\to 1}\right)^{\frac{2}{n}\to 0} \to 1^0=1$$

$$\to \frac{e}{3} =: q < 1 \quad \text{per } n\to+\infty$$

Quindi la serie converge

Esercizio 2

[5 punti]

Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^2)-x\cdot\sin(x)}{e^{2x^2}-\cosh(2x)} =: \ell$$

Risoluzione

Con Taylor

Denominatore: $\bullet\ e^t = 1+t+\frac{t^2}{2}+o(t^2) \Rightarrow$

$$e^{2x^2} = 1+2x^2+\frac{(2x^2)^2}{2}+o(x^4) = 1+2x^2+2x^4+o(x^4)$$

$\bullet\ \cosh(t) = 1+\frac{t^2}{2}+\frac{t^4}{24}+o(t^4) \Rightarrow \cosh(2x) = 1+\frac{(2x)^2}{2}+\frac{(2x)^4}{24}+o(x^4)$

$$= 1+2x^2+\frac{2}{3}x^4+o(x^4)$$

$$\Rightarrow e^{2x^2}-\cosh(2x) = \cancel{1}+\cancel{2x^2}+2x^4-\left(\cancel{1}+\cancel{2x^2}+\frac{2}{3}x^4\right)+o(x^4)$$

$$= \frac{6-2}{3}\cdot x^4+o(x^4) = \frac{4}{3}x^4+o(x^4) \sim \frac{4}{3}x^4 \quad \text{per } x\to 0$$

Numeratore (da sviluppare fino al 4° ordine)

$\bullet\ \ln(1+t) = t-\frac{t^2}{2}+o(t^2) \Rightarrow \ln(1+x^2) = x^2-\frac{x^4}{2}+o(x^4)$

$\bullet\ \sin(x) = x-\frac{x^3}{6}+o(x^4) \Rightarrow x\cdot\sin(x) = x^2-\frac{x^4}{6}+o(x^4)$

$$\Rightarrow \ln(1+x^2)-x\cdot\sin(x) = \cancel{x^2}-\frac{x^4}{2}-\left(\cancel{x^2}-\frac{x^4}{6}\right)+o(x^4)$$

$$= \frac{-3+1}{6}\cdot x^4+o(x^4) = -\frac{1}{3}x^4+o(x^4)$$

$$\sim -\frac{1}{3}x^4 \quad \text{per } x\to 0$$

$$\Rightarrow \ell = \lim_{x\to 0}\frac{-1/3\cdot\cancel{x^4}}{4/3\cdot\cancel{x^4}} = -\frac{1}{4}$$

Esercizio 3

[5 punti]

Calcolare il piano tangente in $(2,-1)$ al grafico della funzione $f(x,y) = 2 + \sqrt{9 - x^3 \cdot y^2}$

Risoluzione

- $p(x,y) = f(2,-1) + f_x(2,-1)\cdot(x-2) + f_y(2,-1)\cdot(x+1)$

- $f(2,-1) = 2 + \underbrace{\sqrt{9 - 2^3\cdot(-1)^2}}_{=1} = 3$

- $f_x(x,y) = \dfrac{-3x^2\cdot y^2}{2\cdot\sqrt{9-x^3\cdot y^2}} \Rightarrow f_x(2,-1) = \dfrac{-3\cdot 2^2\cdot(-1)^2}{2\cdot 1} = -6$

- $f_y(x,y) = \dfrac{-x^3\cdot 2y}{2\cdot\sqrt{9-x^3\cdot y^2}} \Rightarrow f_y(2,-1) = \dfrac{-2^3\cdot\cancel{2}\cdot(-1)}{\cancel{2}\cdot 1} = 8$

$\Rightarrow$ $p(x,y) = 3 - 6\cdot(x-2) + 8\cdot(x+1)$

Esercizio 4

[4 punti]

Studiare la continuità in $(0,0)$ della funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(1-e^{2y})\cdot\sinh(x^3)}{x^4+2y^4} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Risoluzione

- f è continua se $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.

- Poniamo $y = x \Rightarrow$

$$\lim_{x\to 0} f(x,x) = \frac{(1-e^{2x})\cdot\sinh(x^3)}{x^4+2x^4} = \lim_{x\to 0} -\frac{e^{2x}-1}{2x}\cdot\frac{1}{\frac{1}{2}\cdot 3}\cdot\frac{\sinh(x^3)}{x^3}$$

$\to 1$ $\to 1$

$$= -\frac{2}{3} \neq f(0,0) = 0$$

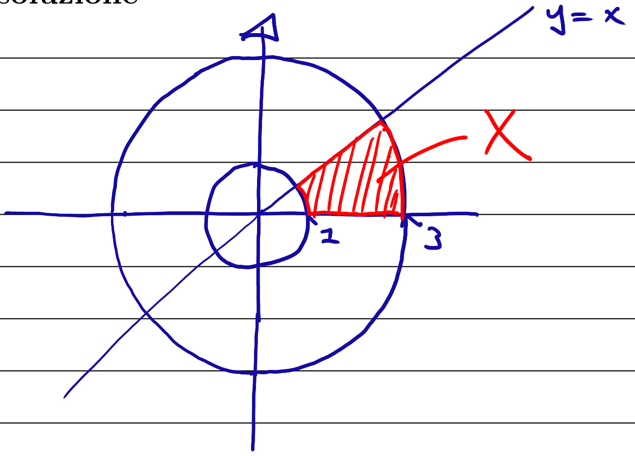
$\Rightarrow$ f non è continua in $(0,0)$.

Esercizio 5 **[6 punti]**

Disegnare l'insieme $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \le x^2 + y^2 \le 9,\ 0 \le y \le x\}$ e calcolare l'integrale doppio

$$I := \iint_X \frac{x \cdot y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dx dy$$

Risoluzione



X corrisponde a

$$X' = \{(\rho,\vartheta) \mid 1 \le \rho \le 3,\ 0 \le \vartheta \le \pi/4\} = [1,3] \times [0, \pi/4]$$

in coordinate polari

Quindi passiamo alle coordinate polari:

$$I = \iint_{X'} \frac{\rho \cdot \cos\vartheta \cdot \rho^2 \cdot \sin^2\vartheta}{\cancel{\rho}} \cdot \cancel{\rho} \cdot d\rho\, d\vartheta$$

$$\overset{\text{F.T.}}{=} \int_1^3 \int_0^{\pi/4} \rho^3 \cdot \sin^2\vartheta \cdot \cos\vartheta \, d\vartheta\, d\rho$$

$$= \int_1^3 \rho^3 \, d\rho \cdot \int_0^{\pi/4} \underbrace{\sin^2\vartheta \cdot \cos\vartheta}_{= \left(\frac{\sin^3\vartheta}{3}\right)'} d\vartheta$$

(opp. si usa la sostituzione $t = \sin\vartheta$)

$$= \left[\frac{\rho^4}{4}\right]_1^3 \cdot \left[\frac{\sin^3(\vartheta)}{3}\right]_0^{\pi/4} = \frac{1}{4} \cdot (81-1) \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 - 0\right)$$

$$= 20 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2 \cdot \sqrt{2}}{8} = \frac{5}{3} \cdot \sqrt{2}$$