Analisi Matematica 1, Scritto 1-A. Durata della prova: 2 ore **17.9.15**

Firma: ....

Cognome .... **Nome** .... **A.A.** ....

Matricola .... **Corso di Laurea** ....

D1	
D2	
E1	
E2	
E3	
E4	
E5	
Σ	

Domanda 1

[4 punti]

(i) Dare la definizione di $\lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty$.

(ii) Scrivere un esempio di successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ per cui $\lim_{n\to+\infty} a_n = 6$.

Risposta

(i) Cfr. appunti

(ii) P.e. $\lim_{n\to+\infty} \underbrace{\frac{6n+1}{n}}_{=:a_n} = 6$

Domanda 2

[4 punti]

(i) Enunciare il teorema di Lagrange (chiamato anche teorema del valor medio).

(ii) Trovare il punto c di Lagrange per $f(x) = 3x^3$ in $[0, 1]$.

Risposta

(i) Cfr. appunti

(ii) f è derivabile con $f'(x) = 9x^2$. Inoltre $f(0)=0$, $f(1)=3$

$\Rightarrow \frac{f(1)-f(0)}{1-0} = 3 \overset{!}{=} 9c^2$

$\Rightarrow c^2 = 1/3 \Rightarrow c = \sqrt{1/3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

è $c \in [0,1]$

Esercizio 1

[4 punti]

Calcolare, se esiste, il seguente limite

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{9n^2+5} - \sqrt{4n^2+131} =: a_n$$

Risoluzione

$$a_n = \frac{\sqrt{9n^2+5} - \sqrt{4n^2+131}}{\sqrt{9n^2+5} + \sqrt{4n^2+131}} \cdot \left(\sqrt{9n^2+5} + \sqrt{4n^2+131}\right)$$

$$= \frac{9n^2+5-4n^2-131}{\sqrt{9n^2+5}+\sqrt{4n^2+131}} = \frac{5n^2-126}{n\left(\sqrt{9+\underbrace{5/n^2}_{\to 0}} + \sqrt{4+\underbrace{\frac{131}{n^2}}_{\to 0}}\right)}$$

$$\to \frac{+\infty}{\sqrt{9}+\sqrt{4}} = \frac{+\infty}{5} = +\infty$$

Esercizio 2

[5 punti]

Studiare il comportamento della serie

$$S := \sum_{n=1}^{+\infty} \sin\left[\ln\left(1+\frac{3+n^4}{6+2n+n^5}\right)\right]$$

Risoluzione

$\ln(1+x) \sim x$ per $x \to 0$

$$x_n := \frac{3+n^4}{6+2n+n^5} \sim \frac{n^4}{n^5} = \frac{1}{n} \to 0 \text{ per } n \to +\infty \Rightarrow$$

$\sin(y) \sim y$ per $y \to 0$

$$y_n := \ln(1+x_n) \sim x_n \sim \frac{1}{n} \text{ per } n \to +\infty \Rightarrow$$

$$\sin(y_n) \sim y_n \sim \frac{1}{n} \text{ per } n \to +\infty \text{ cioè}$$

$$\sin\left(\ln\left(1+\frac{3+n^4}{6+2n+n^5}\right)\right) \sim \frac{1}{n} \text{ per } n \to +\infty \Rightarrow$$

criterio del confronto asint.

S diverge (a $+\infty$) poiché $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ diverge (a $+\infty$)

Esercizio 3

$= (6+x^4+y^2)^{1/2}$ [5 punti]

Trovare il piano tangente al grafico della funzione $f(x,y) = \sqrt{6+x^4+y^2}$ nel punto $(1,3)$.

Risoluzione

- $P(x,y) = f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0)$
- $f(x_0,y_0) = \sqrt{6+1^4+3^2} = \sqrt{16} = 4$
- $f_x(x,y) = \frac{1}{2}\left(6+x^4+y^2\right)^{-1/2} \cdot 4x^3 \Rightarrow$

$f_x(1,3) = \frac{1}{2\cdot \cancel{4}} \cdot \cancel{4} \cdot 1^3 = 1/2$

- $f_y(x,y) = \frac{1}{\cancel{2}}\left(6+x^4+y^2\right)^{-1/2} \cdot \cancel{2}y \Rightarrow$

$f_y(1,3) = 3/4 \Rightarrow$

- $P(x,y) = 4 + \frac{1}{2}(x-1) + \frac{3}{4}(y-3)$

Esercizio 4

[5 punti]

Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-\cos(xy)}{x^4+y^4} =: f(x,y)$$

Risoluzione

Poniamo $y = m\cdot x$. Così risulta:

$$f(x,mx) = \frac{1-\cos(x\cdot mx)}{x^4+(mx)^4} \quad = \frac{m^2}{1+m^4}$$

$$= \frac{1-\cos(mx^2)}{(mx^2)^2} \cdot \frac{(mx^2)^2}{x^4(1+m^4)}$$

$\hookrightarrow 1/2$ per $x \to 0$

Quindi: $\lim_{x\to 0} f(x,mx) = \frac{1}{2}\cdot\frac{m^2}{1+m^4}$ dipende da m

$\Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ <u>non</u> esiste.

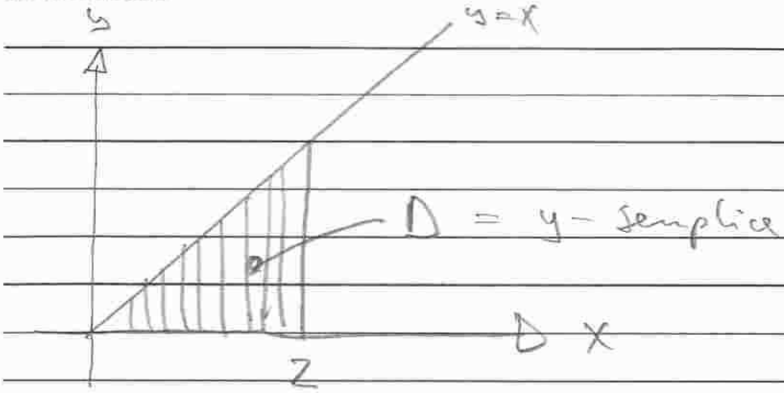
Esercizio 5

[5 punti]

Disegnare l'insieme $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2,\ 0 \leq y \leq x\}$ e calcolare l'integrale

$$I := \iint_D (2x + 2y)\, dxdy.$$

Risoluzione



Per Fubini-Tonelli vale

$$I = \int_0^2 \int_0^x (2x+2y)\, dy\, dx = \int_0^2 \left[2xy + y^2\right]_{y=0}^{y=x} dx$$

$$= \int_0^2 2x^2 + x^2\, dx = \int_0^2 3x^2\, dx = x^3 \Big|_0^2 = 2^3 = 8$$