Analisi Matematica. Durata della prova: 2 ore **17.1.23**

Firma: ....

Cognome .... **Nome** ....

Matricola .... **Corso di Laurea:** Informatica

D1	
D2	
E1	
E2	
E3	
E4	
E5	
Σ	

Domanda 1

[4 punti]

(i) Dare la definizione di derivabilità di una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in $x_0 = 0$.

(ii) Studiare la derivabilità di $f(x) := x \cdot \big(|x| - e\big)$ in $x_0 = 0$.

Risposta

(i) f è derivabile in $x_0 = 0$ se converge il limite

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(h)-f(0)}{h} =: f'(0) = \text{derivata di } f \text{ in } x_0 = 0.$$

(ii) In questo caso

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{h}\cdot(|h|-e) - 0}{\cancel{h}} = \lim_{h\to 0}\big(|h|-e\big)$$

$= -e$ converge

$\Rightarrow$ f è derivabile in $x_0 = 0$ con $f'(0) = -e$

Domanda 2

[4 punti]

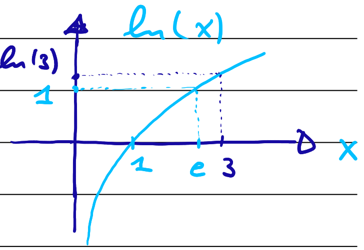
(i) Enunciare il teorema degli zeri.

(ii) Verificare che l'equazione $\cos(x) = \ln(1 + x)$ ammette una soluzione nell'intervallo $[0, 2]$.

Risposta

(i) Se per $f \in C[a,b]$ vale $f(a)\cdot f(b) < 0$ allora esiste $c \in (a,b)$ t.c. $f(c) = 0$.

(ii)
- x è una soluzione $\Leftrightarrow$ $f(x) := \cos(x) - \ln(1+x) = 0$
- $f : [0,2] \to \mathbb{R}$ è continua
- $f(0) = \underbrace{\cos(0)}_{=1} - \underbrace{\ln(1)}_{=0} = 1 > 0$
- $f(2) = \underbrace{\cos(2)}_{<1} - \underbrace{\ln(\overset{>e}{3})}_{>1} < 0$



i) $\Rightarrow$ f ammette uno zero $c \in (0,2)$ $\Rightarrow$ $x = c$ è una soluzione.

Esercizio 1 **[4 punti]**

Studiare il carattere della serie

$$S := \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{\pi}{n}\right)^n \cdot n! =: a_n$$

Risoluzione

- La serie è a termini positivi, quindi possiamo applicare il criterio del rapporto.

- $$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\pi^{\cancel{n+1}} \cdot \overbrace{(n+1)!}^{=(\cancel{n+1})\cdot \cancel{n!}}}{(n+1)^{\cancel{n+1}}} \cdot \frac{n^n}{\cancel{\pi^n}_{1} \cdot \cancel{n!}} = \pi \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$$

$$= \pi \cdot \frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = \pi \cdot \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \to \frac{\pi}{e} =: q > 1$$

per $n \to +\infty$.

- $q > 1 \Rightarrow$ la serie S diverge ($a +\infty$).

Esercizio 2 **[5 punti]**

Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - \sin(x) - x}{x^2 \cdot (e^x - 1)} =: \ell$$

Risoluzione

- $e^x - 1 \sim x \overset{\text{P.d.S.}}{\Rightarrow} x^2 \cdot (e^x - 1) \sim x^3$

$\Rightarrow$ numeratore da sviluppare fino al 3° ordine.

- $$\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \ln(1+x) - \ln(1-x)$$
$$= x - \cancel{\frac{x^2}{2}} + \frac{x^3}{3} - \left(-x - \cancel{\frac{(-x)^2}{2}} + \frac{(-x^3)}{3}\right) + o(x^3)$$
$$= 2x + \frac{2x^3}{3} + o(x)$$

$$\Rightarrow \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - \sin(x) - x = \cancel{2x} + \frac{2}{3}x^3 - \left(\cancel{x} - \frac{x^3}{6}\right) \cancel{-x} + o(x^3)$$
$$= \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{6}\right)x^3 + o(x^3) = \frac{4+1}{6} \cdot x^3 + o(x^3) = \frac{5}{6}x^3 + o(x^3)$$
$$\sim \frac{5}{6}x^3 \quad \text{per } x \to 0$$

$$\overset{\text{P.d.S.}}{\Rightarrow} \ell = \lim_{x\to 0} \frac{5/6\, \cancel{x^3}_{1}}{\cancel{x^3}_{1}} = \frac{5}{6}$$

Esercizio 3

[5 punti]

Calcolare il piano tangente in $(x_0, y_0) = (1, 4)$ al grafico della funzione $f(x, y) = \sqrt{\dfrac{2y}{1+x}}$

Risoluzione

- $p(x,y) = f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)\cdot(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)\cdot(y-y_0)$
- $f(x_0,y_0) = \sqrt{\dfrac{2\cdot 4}{1+1}} = \sqrt{4} = 2$
- $f(x,y) = (2y)^{\frac{1}{2}}\cdot(1+x)^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow$

$$f_x(x,y) = (2\cdot y)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(-\tfrac{1}{2}\right)\cdot(1+x)^{-\frac{3}{2}} \Rightarrow f_x(1,4) = \overbrace{(2\cdot 4)^{\frac{1}{2}}}^{=\cancel{2^{\frac{1}{2}}}\cdot\cancel{2}}\cdot\left(-\tfrac{1}{\cancel{2}_{1}}\right)\cdot\overbrace{(1+1)^{-\frac{3}{2}}}^{=\cancel{2^{-\frac{1}{2}}}\cdot 2^{-1}} = -\frac{1}{2}$$

$$f_y(x,y) = \cancel{\tfrac{1}{2}}\cdot(2y)^{-\frac{1}{2}}\cdot\cancel{2}\cdot(1+x)^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow f_y(1,4) = (2\cdot 4)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}\cdot 2\cdot\sqrt{2}} = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{p(x,y) = 2 - \tfrac{1}{2}(x-1) + \tfrac{1}{4}(y-4)}}$$

Esercizio 4

[4 punti]

Studiare la continuità in $(0, 0)$ della funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(1-\cos(y))\cdot\sinh(x^2)}{x^4+2y^4} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Risoluzione

- $1-\cos(y) \sim \dfrac{y^2}{2}$ per $y\to 0$, $\sinh(x^2) \sim x^2$ per $x \to 0$ $\Rightarrow$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \frac{1}{2}\cdot\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^2\cdot x^2}{x^4+2y^4}$$

- Ponendo $y = x$ segue: $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x,x) = \frac{x^2\cdot x^2}{x^4+2x^4} = \frac{1}{3} \neq f(0,0)$

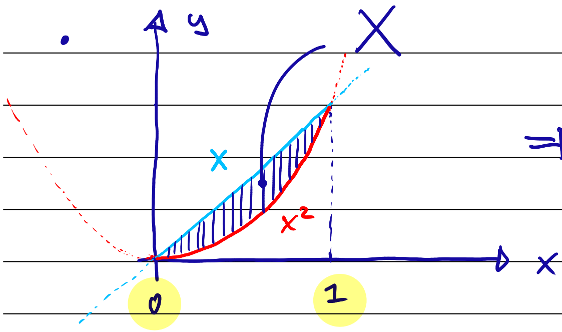
$\Rightarrow$ f non è continua in $(0,0)$.

Esercizio 5 **[6 punti]**

Disegnare l'insieme $X = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2 \le y \le x\}$ e calcolare l'integrale doppio

$$I := \iint_X e^{\frac{y}{x}}\,dxdy$$

Risoluzione



$\Rightarrow X = \{(x,y) \mid x\in[0,1],\ x^2\le y\le x\}$

è y-semplice.

Quindi per Fubini-Tonelli segue:

$$I = \int_{x=0}^{1} \int_{y=x^2}^{x} e^{y/x}\, dy\, dx = \int_{x=0}^{1} \left[x\cdot e^{y/x}\right]_{y=x^2}^{x} dx$$

$$= \int_0^1 \underbrace{x}_{f}\cdot\underbrace{(e-e^x)}_{g'}\, dx = \underbrace{x}_{f}\cdot\underbrace{(e\cdot x-e^x)}_{g}\Big|_0^1 - \int_0^1 \underbrace{1}_{f'}\cdot\underbrace{(ex-e^x)}_{g}\, dx$$

$$= 1\cdot(\underbrace{e\cdot 1-e^1}_{=0}) - 0 - \left[\frac{e}{2}\cdot x^2 - e^x\right]_0^1 = -\left(\frac{e}{2}\cdot 1^2 - e^1 - 0 + 1\right)$$

$$= -\frac{e}{2} + e - 1 = \underline{\underline{\frac{e}{2} - 1}}\ .$$