Analisi Matematica 1, Scritto 1-A. Durata della prova: 2 ore 17.2.12

Firma: ....

Cognome: .... **Nome:** ....

Matricola: .... **Corso di Laurea:** .... **Canale:** A B C D

D1	
D2	
E1	
E2	
E3	
E4	
E5	
Σ	

Domanda 1

[1+2 punti]

(i) Enunciare il teorema di Lagrange (detto anche del valor medio).

(ii) Dare un esempio di una funzione $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, tale che il punto di Lagrange è unico e coincide con il punto medio dell'intervallo.

Risposta

(i) Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ è continua e derivabile in (a,b), allora $\exists\, c \in (a,b)$ tale che

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}.$$

(ii) Sia $f : [0,1]$, $f(x) = x^2$. $\Rightarrow f'(x) = 2x$, quindi

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{1^2 - 0^2}{1-0} = 1 = 2 \cdot \frac{1}{2} = f'\left(\frac{1}{2}\right).$$

Domanda 2

[3 punti]

Sia $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ una serie convergente a termini positivi. Allora

- [a] $a_n \leq \frac{1}{n^2}$ definitivamente
- [b] $a_n = \frac{1}{2^n}$
- [c] la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{a_n}$ converge
- [d] la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{1 + a_n}$ converge

Risposta

Visto che $a_n \geq 0$ segue $1 + a_n \geq 1$ e quindi

$0 \leq \frac{a_n}{1+a_n} \leq a_n$. Per il criterio del confronto

per la serie segue d)

Esercizio 1

[3 punti]

Studiare la convergenza del seguente integrale improprio $I := \int_0^1 \underbrace{\frac{\sin\sqrt{x}}{1-\cos\sqrt{x}}}_{=: f(x)} dx.$

Risoluzione

$f:(0,1] \to \mathbb{R}$ è continua. Inoltre per $x \to 0$ vale

$\sin\sqrt{x} \sim \sqrt{x}$ e $1-\cos\sqrt{x} \sim \frac{(\sqrt{x})^2}{2} = \frac{x}{2}$

Quindi per il principio di sostituzione vale

$f(x) \sim \frac{\sqrt{x}}{\frac{x}{2}} = \frac{2}{\sqrt{x}}$ per $x \to 0$. Visto che

$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \int_0^1 \frac{1}{x^{1/2}} dx$ converge $\Rightarrow I$ converge.

Esercizio 2

[4 punti]

Calcolare, se esiste, il limite

$$-\frac{1}{8} = \lim_{x\to 0} \underbrace{\frac{\ln\left(\cos(x) + \frac{1}{2}\sin^2(x)\right)}{(x \cdot e^x - x)^2}}_{=: h(x)}$$

Risoluzione

- $(x \cdot e^x - x)^2 = x^2 \cdot (e^x - 1)^2 \sim x^2 \cdot x^2 = x^4$ per $x \to 0$
- $\cos(x) + \frac{1}{2}\sin^2(x) = 1 + \underbrace{\cos(x) - 1 + \frac{1}{2}\sin^2(x)}_{=: t \to 0 \text{ per } x \to 0}$ e
  $\ln(1+t) \sim t$ per $t \to 0$

$\Rightarrow \ln\left(\cos(x) + \frac{1}{2}\sin^2(x)\right) \sim \cos(x) - 1 + \frac{1}{2}\sin^2(x)$ per $x \to 0$

- $\cos(x) - 1 = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$ per $x \to 0$
- $\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \Rightarrow \sin^2(x) = \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^2 = x^2 - \frac{2x \cdot x^3}{6} + o(x^4)$
  $= x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^4)$

$\Rightarrow \cos(x) - 1 + \frac{1}{2}\sin^2(x) = \cancel{-\frac{x^2}{2}} + \frac{x^4}{24} \cancel{+\frac{x^2}{2}} - \frac{x^4}{6} + o(x^4)$

$= \left(\frac{1}{24} - \frac{1}{8}\right) x^4 + o(x^4) = -\frac{1}{8} x^4 + o(x^4)$ per $x \to 0$

$\Rightarrow h(x) \sim \frac{-1/8 \cdot x^4}{x^4} = \underline{\underline{-\frac{1}{8}}} =$ limite per $x \to 0$.

Esercizio 3

[3 punti]

Studiare la continuità e la differenziabilità in $(0,0)$ di $f(x,y) = \begin{cases} \frac{2x-y^2}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$

Risoluzione

Per $y=0$ si ottiene

$$\lim_{x\to 0} f(x,0) = \lim_{x \to 0} \frac{2}{x} \quad \text{non esiste} \implies$$

f non è continua in $(0,0)$ $\implies$

f non è differenziabile in $(0,0)$.

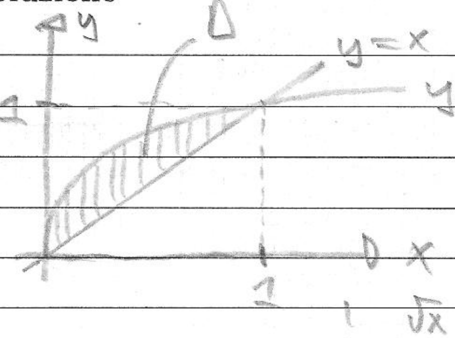
Esercizio 4

[4 punti]

Disegnare il dominio $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq y \leq \sqrt{x}\}$ e calcolare l'integrale doppio

$$I := \iint_D x^2 + y \, dx \, dy = \frac{5}{42}$$

Risoluzione



$D = \{(x,y) \mid x \in [0,1],\ x \leq y \leq \sqrt{x}\}$ è y-semplice. Quindi con Fubini-Tonelli

segue $$I = \int_{x=0}^{1} \int_{y=x}^{\sqrt{x}} (x^2+y)\, dy\, dx = \int_{x=0}^{1} \left[x^2 y + \frac{y^2}{2}\right]_{y=x}^{y=\sqrt{x}} dx$$

$$= \int_0^1 x^2 \cdot \sqrt{x} + \frac{(\sqrt{x})^2}{2} - x^2 \cdot x - \frac{x^2}{2}\, dx = \int_0^1 x^{5/2} + \frac{x}{2} - x^3 - \frac{x^2}{2}\, dx$$

$$= \left[\frac{2}{7} \cdot x^{7/2} + \frac{x^2}{4} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{6}\right]_0^1 =$$

$$= \frac{2}{7} + \cancel{\frac{1}{4}} - \cancel{\frac{1}{4}} - \frac{1}{6} = \frac{5}{42}$$

Esercizio 5

[6 punti]

Trovare dominio, eventuali simmetrie, zeri, punti di non derivabilità, di estremo locale ed asintoti della funzione $f(x) = \arctan \frac{x^2+x}{x^2+1}$ e tracciarne un grafico approssimativo.

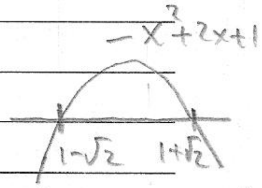
Risoluzione

- $D(f) = \mathbb{R}$
- simmetrie NO
- Zeri: $\arctan(t) = 0 \Leftrightarrow t = 0$. Quindi $f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2+x}{x^2+1} = 0 \Leftrightarrow x^2+x = x(x+1) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ opp. -1.
- f è derivabile su tutto $\mathbb{R}$ (arctan è continua)
- asintoti: $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \arctan\left(\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2+x}{x^2+1}\right) = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$.
- $f'(x) = \frac{1}{1+\left(\frac{x^2+x}{x^2+1}\right)^2} \cdot \frac{(x^2+1)(2x+1) - 2x\cdot(x^2+x)}{(x^2+1)^2}$

$$= \frac{1}{1+\left(\frac{x^2+x}{x^2+1}\right)^2} \cdot \frac{\cancel{2x^3}+2x+x^2+1-\cancel{2x^3}-2x^2}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{1}{1+\left(\frac{x^2+x}{x^2+1}\right)^2} \cdot \frac{-x^2+2x+1}{(x^2+1)^2}.$$

$\frac{1}{1+\left(\frac{x^2+x}{x^2+1}\right)^2} \cdot \frac{1}{(x^2+1)^2} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$



Quindi $f'(x) = 0 \Leftrightarrow -x^2+2x+1 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \pm \sqrt{2}$

Inoltre $f'(x)$ cambia segno in $x = 1-\sqrt{2}$ da "$-$" a "$+$" $\Rightarrow$ pto. di min loc.
in $x = 1+\sqrt{2}$ da "$+$" a "$-$" $\Rightarrow$ pto. di max. loc.