Analisi Matematica 1, Scritto 1-~~A~~ B. Durata della prova: 2 ore 17.2.12

Firma: ....

Cognome: .... Nome: ....

Matricola: .... Corso di Laurea: .... Canale: A B C D

D1	
D2	
E1	
E2	
E3	
E4	
E5	
Σ	

Domanda 1

[1+2 punti]

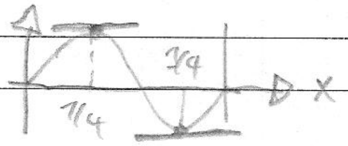
(i) Enunciare il teorema di Lagrange (detto anche del valor medio).

(ii) Dare un esempio di una funzione $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, tale che il punto di Lagrange non è unico.

Risposta

(i) cfr. compito 1-A

(ii) $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin(2\pi \cdot x)$. Allora $f(0) = f(1) = 0$ e $f'(x) = 2\pi \cdot \cos(2\pi x) = 0$ per $x = \frac{1}{4}$ e $x = \frac{3}{4}$



Domanda 2

[3 punti]

Sia $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ una serie convergente a termini positivi. Allora

a $a_n = \frac{1}{2^n}$

b $a_n \leq \frac{1}{n^2}$ definitivamente

c la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n)^2$ converge

d la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1+a_n}{a_n}$ converge

Risposta

Visto che la serie converge segue $a_n \to 0$ per $n \to +\infty$ e quindi $0 \leq a_n \leq 1$ definitivamente. Ciò implica $0 \leq a_n^2 \leq a_n$ definitivamente e quindi la serie in c) converge per il criterio del confronto.

Esercizio 1

[3 punti]

$=: g(x)$

Studiare la convergenza del seguente integrale improprio $I := \int_0^1 \sqrt{\frac{\sin x}{1-\cos x}}\,dx.$

Risoluzione

$g:(0,1] \to \mathbb{R}$ è continua. Inoltre per $x \to 0$ vale

$\sin(x) \sim x$ e $1-\cos(x) \sim \frac{x^2}{2}$, quindi risulta

$$\frac{\sin(x)}{1-\cos(x)} \sim \frac{x}{x^2/2} = \frac{2}{x} \Rightarrow \sqrt{\frac{\sin(x)}{1-\cos(x)}} \sim \sqrt{\frac{2}{x}} = \sqrt{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}$$

per $x \to 0$

Visto che $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ converge risulta che

anche I converge.

Esercizio 2

[4 punti]

Calcolare, se esiste, il limite

$$\frac{1}{24} = \lim_{x\to 0} \frac{\ln\left(\cos(x) + \frac{1}{2}\sin(x^2)\right)}{(x\cdot e^x - x)^2} =: h(x)$$

Risoluzione

- $(x\cdot e^x - x)^2 = (x\cdot(e^x-1))^2 \sim (x\cdot x)^2 = x^4$ per $x \to 0$

- $\cos(x) + \frac{1}{2}\sin(x^2) = 1 + \underbrace{\cos(x) - 1 + \frac{1}{2}\sin(x^2)}_{=t \to 0 \text{ per } x\to 0}$ e
$\ln(1+t) \sim t$ per $t \to 0$

$$\Rightarrow \ln\left(\cos(x) + \tfrac{1}{2}\sin(x^2)\right) \sim \cos(x) - 1 + \tfrac{1}{2}\sin(x^2)$$

$$= \cancel{-\frac{x^2}{2}} + \frac{x^4}{24} + \cancel{\frac{x^2}{2}} + o((x^2)^2) = \frac{1}{24}x^4 + o(x^4) \sim x^4$$

per $x \to 0$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} h(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{24}\cdot x^4}{x^4} = \frac{1}{24}$$

Esercizio 3

[3 punti]

Studiare la continuità e la differenziabilità in $(0,0)$ di $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2-2y}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$

Risoluzione

Ponendo $x=0$ segue

$$\lim_{y\to 0} f(0,y) = \lim_{y\to 0} \frac{2y}{y^2} = \lim_{y\to 0} 2\cdot\frac{1}{y} \quad \text{non esiste}$$

$\Rightarrow$ f non è continua in $(0,0)$

$\Rightarrow$ f non è differenziabile in $(0,0)$

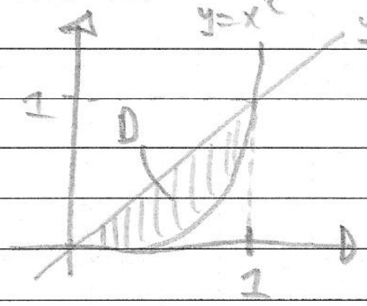
Esercizio 4

[4 punti]

Disegnare il dominio $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 \leq y \leq x\}$ e calcolare l'integrale doppio

$$I := \iint_D \sqrt{x} + 3y \, dx\, dy = \frac{11}{35}$$

Risoluzione



$D = \{(x,y) \mid x \in [0,1],\ x^2 \leq y \leq x\}$ è y-semplice. Quindi per Fubini-Tonelli segue

$$I = \int_{x=0}^{1} \int_{y=x^2}^{x} (\sqrt{x}+3y)\, dy\, dx = \int_0^1 \left[\sqrt{x}\cdot y + 3\cdot\frac{y^2}{2}\right]_{y=x^2}^{x} dx$$

$$= \int_0^1 \left(\sqrt{x}\cdot x + \frac{3}{2}x^2 - \sqrt{x}\cdot x^2 - \frac{3}{2}(x^2)^2\right) dx$$

$$= \int_0^1 \left(x^{3/2} + \frac{3}{2}x^2 - x^{5/2} - \frac{3}{2}x^4\right) dx$$

$$= \left[\frac{2}{5}x^{5/2} + \frac{\cancel{3}}{2}\cdot\frac{x^3}{\cancel{3}} - \frac{2}{7}x^{7/2} - \frac{3}{2}\cdot\frac{x^5}{5}\right]_0^1 = \frac{2}{5}+\frac{1}{2}-\frac{2}{7}-\frac{3}{10}$$

$$= \frac{11}{35}$$

Esercizio 5

[6 punti]

Trovare dominio, eventuali simmetrie, zeri, punti di non derivabilità, di estremo locale ed asintoti della funzione $f(x) = \arctan \dfrac{x - x^2}{x^2 + 1}$ e tracciarne un grafico approssimativo.

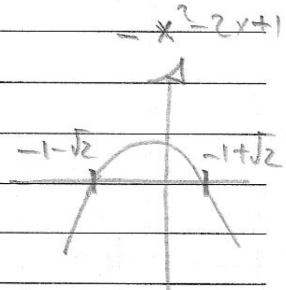
Risoluzione

- $D(f) = \mathbb{R}$
- Simmetrie: NO
- zeri: $\arctan(t) = 0 \iff t = 0$. Quindi $f(x) = 0 \iff$
  $\dfrac{x - x^2}{x^2+1} = 0 \iff x - x^2 = x(1-x) = 0 \iff x = 0$ opp. $x = 1$
- f è derivabile su tutto $\mathbb{R}$ (arctan è continua)
- asintoti: $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \arctan\left(\lim_{x\to\pm\infty} \dfrac{x-x^2}{x^2+1}\right)$
  $= \arctan(-1) = -\dfrac{\pi}{4}$
- $f'(x) = \dfrac{1}{1+\left(\frac{x-x^2}{x^2+1}\right)^2} \cdot \dfrac{(x^2+1)(1-2x) - 2x\cdot(x-x^2)}{(x^2+1)^2}$

$$= \frac{1}{1+\left(\frac{x-x^2}{x^2+1}\right)^2} \cdot \frac{x^2+1-\cancel{2x^3}-2x-2x^2\cancel{+2x^3}}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{1}{1+\left(\frac{x-x^2}{x^2+1}\right)^2} \cdot \frac{-x^2-2x+1}{(x^2+1)^2}$$

$\dfrac{1}{1+\left(\frac{x-x^2}{x^2+1}\right)^2} \cdot \dfrac{1}{(x^2+1)^2} > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$



Quindi $f'(x) = 0 \iff -x^2-2x+1 = 0 \iff x = -1 \pm \sqrt{2}$

Inoltre $f'(x)$ cambia segno in $x = -1-\sqrt{2}$ da "$-$" a "$+$" $\Rightarrow$ pto di min. loc.
in $x = -1+\sqrt{2}$ da "$+$" a "$-$" $\Rightarrow$ pto. di max. loc.