Analisi Matematica 1, Scritto 2-A. Durata della prova: 2 ore 17.2.12

Firma: ....

Cognome: .... **Nome:** ....

Matricola:................ **Corso di Laurea:**........................ **Canale:** [A] [B] [C] [D]

D1	
D2	
E1	
E2	
E3	
E4	
E5	
Σ	

Domanda 1

[1+2 punti]

(i) Data $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in (a, b)$, dare la definizione di rapporto incrementale e di derivata della funzione f in x_0.

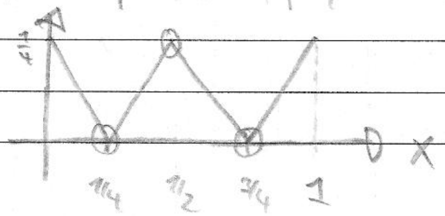
(ii) Dare un esempio di una funzione $f : (0, 1) \to \mathbb{R}$ che non è derivabile in esattamente due punti.

Risposta

(i) Per $x, x_0 \in (a,b)$ il rapporto $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ $\left(= \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \text{ con } h = x-x_0\right)$ si chiama rapporto incrementale.

f è derivabile in x_0 se esiste finito $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ $\left(= \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\right)$

(ii) Per esempio $f(x) = \left| |x - \frac{1}{2}| - \frac{1}{4} \right|$, $x \in (0,1)$ non è derivabile in $x = \frac{1}{4}, \frac{1}{2}$ e $\frac{3}{4}$



Domanda 2

[3 punti]

Sia $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ una funzione continua e monotona decrescente. Allora

[a] f è costante

[b] esiste $c \in (0, 1)$ tale che $f(c) = 0$

[c] $\sup\{f(x) : x \in (0, 1)\} \leq f(0)$

[d] f è derivabile con $f'(x) \leq 0$ per ogni $x \in (0, 1)$

Risposta

f decrescente $\Rightarrow$ $f(x) \leq f(0)$ $\forall x \in [0,1]$ $\Rightarrow$

$\sup\{f(x) : x \in (0,1)\} \leq f(0)$

Esercizio 1

[3 punti]

Studiare la convergenza semplice ed assoluta della serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{\cos(n\pi)}_{=(-1)^n} \cdot \underbrace{\sqrt{1-\cos(\frac{1}{n})}}_{=a_n}$

Risoluzione

$1-\cos(t) \sim \frac{t^2}{2}$ per $t \to 0$. Visto che $\frac{1}{n} = t \to 0$ per $n \to +\infty$

segue $1-\cos(\frac{1}{n}) \sim \frac{(1/n)^2}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n^2}$ per $n \to +\infty$

$\Rightarrow a_n = \sqrt{1-\cos(\frac{1}{n})} \sim \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{n}$ per $n \to +\infty$.

Inoltre vale $\cos(\pi n) = (-1)^n$. Quindi la serie converge per il criterio di Leibniz ($(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è decrescente ed infinitesima) ma <u>non</u> converge assolutamente.

Esercizio 2

[4 punti]

Calcolare, se esiste, il limite

$$\frac{3}{2} = \lim_{x\to 0} \frac{(2x - \sin(x))\ln(1+3x)}{1-\cos(2x)} =: h(x)$$

Risoluzione

- $2x - \sin(x) = 2x - x + o(x^2) = x + o(x) \sim x$ per $x \to 0$
- $\ln(1+3x) \sim 3x$ per $x \to 0$
- $1-\cos(2x) = \frac{(2x)^2}{2} + o(x^2) = 2x^2 + o(x^2) \sim 2x^2$ per $x \to 0$

$\Rightarrow h(x) \sim \frac{x \cdot 3x}{2x^2} = \frac{3}{2}$

$\Rightarrow \lim_{x \to 0} h(x) = \frac{3}{2}$

Esercizio 3

[3 punti]

Studiare la continuità e l'esistenza delle derivate parziali in $(0,0)$ di $f(x,y) = \begin{cases} \frac{(x-y)^2}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 1 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$

Risoluzione

• Continuità: Per $\overset{\overset{0}{\neq}}{x} = y$ vale $f(x,y) = f(x,x) = 0$, quindi

$\lim_{x \to 0} f(x,x) = 0 \neq f(0,0) = 1 \Rightarrow f$ non è continua in $(0,0)$

• Derivate parziali: $f_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} =$

$= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h^2}{h^2} - 1}{h} = \lim_{h \to 0} 0 = 0$

$f_y(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{(-h)^2}{h^2} - 1}{h} = 0$

$\Rightarrow f$ è derivabile parzialmente in $(0,0)$

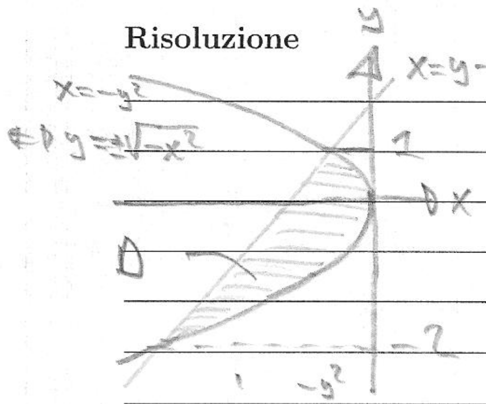
Esercizio 4

[4 punti]

Disegnare il dominio $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y - 2 \leq x \leq -y^2\}$ e calcolare l'integrale doppio

$$I = \iint_D e^y \, dx \, dy = e + \frac{5}{e^2}$$

Risoluzione



$y - 2 = -y^2 \Leftrightarrow y^2 + y - 2 = 0$

$\Leftrightarrow y = 1$ opp. -2

Quindi $D = \{(x,y) \mid y \in [-2,1],\ y-2 \leq x \leq -y^2\}$

è x-semplice. Con Fubini-Tonelli segue

$I = \int_{y=-2}^{1} \int_{x=y-2}^{-y^2} e^y \, dx \, dy = \int_{y=-2}^{1} x \cdot e^y \Big|_{x=y-2}^{-y^2} dx = \int_{-2}^{1} \underbrace{(-y^2-y+2)}_{f} \cdot \underbrace{e^y}_{g'} \, dy$

$= (-y^2-y+2) \cdot e^y \Big|_{-2}^{1} + \int_{-2}^{1} \underbrace{(+2y+1)}_{u} \underbrace{e^y}_{v'} \, dy =$

$= \underbrace{(-1^2-1+2)}_{=0} \cdot e^1 - \underbrace{(-(-2)^2+2+2)}_{=0} \cdot e^{-2} + (2y+1)e^y \Big|_{-2}^{1} - \int_{-2}^{1} 2 \cdot e^y \, dy$

$= (2+1) \cdot e - (-4+1) e^{-2} - 2 e^y \Big|_{-2}^{1}$

$= 3e + 3e^{-2} - 2e + 2e^{-2} = e + 5 \cdot e^{-2} = e + \frac{5}{e^2}$

Esercizio 5

[6 punti]

Trovare dominio, eventuali simmetrie, zeri, punti di estremo locale ed asintoti della funzione
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{e}} - e^{-\frac{x^2}{x^2+1}}$ e tracciarne un grafico approssimativo.

Risoluzione

- $D(f) = \mathbb{R}$
- $f(x) = f(-x)$ cioè f è pari. e^t è iniettiva
- $f(x) = 0 \iff e^{-\frac{x^2}{x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{e}} = e^{-\frac{1}{2}} \iff$

$\frac{x^2}{x^2+1} = \frac{1}{2} \iff 2x^2 = x^2+1 \iff x^2 = 1 \iff x = \pm 1.$

- $f'(x) = e^{-\frac{x^2}{x^2+1}} \cdot \frac{(x^2+1)2x - 2x \cdot x^2}{x^2+1} = \frac{e^{-\frac{x^2}{x^2+1}}}{x^2+1} \cdot 2x$ $\quad > 0 \; \forall x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ $x=0$ è l'unico pto. critico e $f'(x)$ cambia segno in $x=0$ da "−" a "+" $\Rightarrow$ $x=0$ è un pto. di min. locale

- Asintoti: $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \frac{1}{\sqrt{e}} - e^{-\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{e}} - \frac{1}{e} > 0$

(funz. esponenziale è continua)

$\Rightarrow$ $y = \frac{1}{\sqrt{e}} - \frac{1}{e}$ è un asintoto orizzontale per $x \to \pm\infty$

- $f(0) = \frac{1}{\sqrt{e}} - 1 < 0$