Analisi Matematica 1, Scritto 2-~~A~~B. Durata della prova: 2 ore 17.2.12

Cognome: .... **Nome:** ....

Matricola: .... **Corso di Laurea:** .... **Canale:** [A] [B] [C] [D]

Firma: ....

D1	
D2	
E1	
E2	
E3	
E4	
E5	
Σ	

Domanda 1

[1+2 punti]

(i) Data $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in (a, b)$, dare la definizione di rapporto incrementale e di derivata della funzione f in x_0.

(ii) Dare un esempio di una funzione $f : (0, 1) \to \mathbb{R}$ che non è derivabile in almeno tre punti.

Risposta

(i) cfr. Compito 2-A

(ii) P.e. la funzione di Dirichlet $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in (0,1) \cap \mathbb{Q} \\ 0 & \text{se } x \in (0,1) \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$

è discontinua e quindi non derivabile in ogni $x \in (0,1)$.

Domanda 2

[3 punti]

Sia $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ una funzione continua e monotona crescente. Allora

[a] g è costante

[b] esiste $c \in (0, 1)$ tale che $g(c) = 0$

[c] $\inf\{g(x) : x \in (0, 1)\} > g(0)$

[d] $x = 0$ è un punto di minimo

Risposta

g è crescente $\Rightarrow$ $g(0) \leq g(x)\ \forall\, x \in [0,1]$ $\Rightarrow$

0 è un pto. di minimo di g.

Esercizio 1

[3 punti]

Studiare la convergenza semplice ed assoluta della serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \cos(n\pi) \cdot \sqrt{\sin(\frac{1}{n^2}) - \sin^2(\frac{1}{n})}$.

Risoluzione

Per $x \to 0$ vale: $\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4) \Rightarrow$

$\sin^2(x) = x^2 - 2 \cdot x \cdot \frac{x^3}{6} + o(x^4) = x^2 - \frac{1}{3} x^4 \Rightarrow$

$\sin(x^2) - \sin^2(x) = x^2 + o((x^2)^2) - x^2 + \frac{1}{3} x^4 + o(x^4)$

$= \frac{1}{3} x^4 + o(x^4) \sim \frac{1}{3} x^4$ per $x \to 0$

Per $x = \frac{1}{n} \to 0$ per $n \to +\infty$ segue $\sin(\frac{1}{n^2}) - \sin^2(\frac{1}{n}) \sim \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{n^4}$

$\Rightarrow \sqrt{\sin(\frac{1}{n^2}) - \sin^2(\frac{1}{n})} \sim \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{n^2}$. Inoltre $|\cos(n \cdot \pi)| \leq 1 \Rightarrow$

La serie converge assolutamente quindi anche semplicemente.

Esercizio 2

[4 punti]

Calcolare, se esiste, il limite

$$-\frac{8}{9} = \lim_{x\to 0} \frac{(\sin(x) - 3x)\ln(1-2x)}{\cos(3x) - 1} =: h(x)$$

Risoluzione

- $\sin(x) - 3x = x + o(x^2) - 3x = -2x + o(x) \sim -2x$ per $x \to 0$
- $\ln(1-2x) \sim -2x$ per $x \to 0$
- $\cos(3x) - 1 = -\frac{(3x)^2}{2} + o(x^2) \sim -\frac{9}{2} x^2$ per $x \to 0$

$\Rightarrow h(x) \sim \frac{(-2x)\cdot(-2x)}{-\frac{9}{2} x^2} = -\frac{8}{9} \Rightarrow$

$\lim_{x \to 0} h(x) = -\frac{8}{9}$

Esercizio 3

[3 punti]

Studiare la continuità e l'esistenza delle derivate parziali in $(0,0)$ di $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ -1 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$

Risoluzione

• Per $x=y$ vale $f(x,y) = f(x,x) = 0$. Quindi $\lim_{x\to 0} f(x,x) = 0 \neq f(0,0) = -1$

$\Rightarrow$ f non è continua in $(0,0)$

• $f_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h^2}{h^2}+1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2}{h}$ non converge

• $f_y(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-\frac{h^2}{h^2}+1}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0$

Quindi f è derivabile in $(0,0)$ rispetto a y ma non rispetto a x.

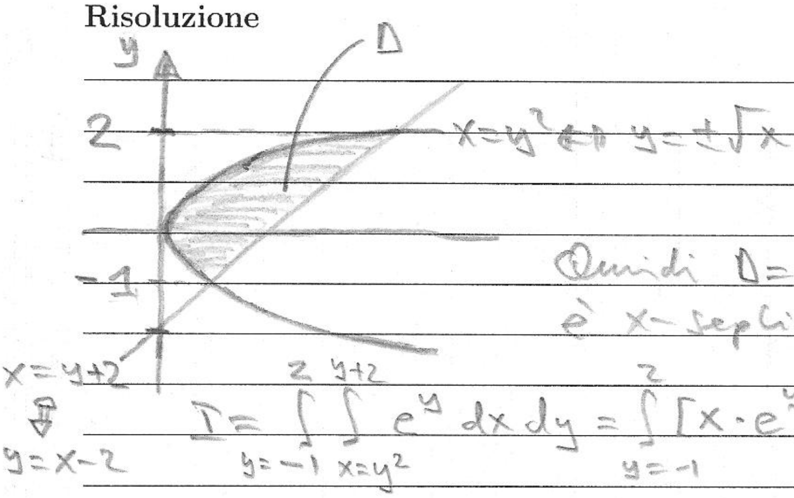
Esercizio 4

[4 punti]

Disegnare il dominio $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 \leq x \leq y+2\}$ e calcolare l'integrale doppio

$$I := \iint_D e^y \, dx\, dy = e^2 + \frac{5}{e}$$

Risoluzione



$y+2 = y^2 \Leftrightarrow y^2-y-2=0$ (*)

$\Leftrightarrow y=-1$ opp. 2

Quindi $D = \{(x,y) \mid y\in[-1,2],\ y^2 \leq x \leq y+2\}$ è x-semplice. Con Fubini-Tonelli segue

$$I = \int_{y=-1}^{2}\int_{x=y^2}^{y+2} e^y \, dx\, dy = \int_{y=-1}^{2} [x\cdot e^y]_{x=y^2}^{y+2} \, dy = \int_{-1}^{2} \underbrace{(y+2-y^2)}_{f}\underbrace{e^y}_{g'} dy$$

$$= \underbrace{\left[(y+2-y^2)\cdot e^y\right]_{-1}^{2}}_{=0 \text{ causa } (*)} - \int_{-1}^{2} \underbrace{(1-2y)}_{u} \cdot \underbrace{e^y}_{v'} dy = -(1-2y)\cdot e^y\Big|_{-1}^{2} + \int_{-1}^{2} 2e^y dy$$

$$= -\left((1-4)\cdot e^2 - (1+2)e^{-1}\right) - 2e^y\Big|_{-1}^{2} = 3e^2 + 3e^{-1} - 2e^2 + 2e^{-1}$$

$$= e^2 + 5e^{-1} = e^2 + \frac{5}{e}$$

Esercizio 5

[6 punti]

Trovare dominio, eventuali simmetrie, zeri, punti di estremo locale ed asintoti della funzione

$f(x) = \sqrt{e} - e^{\frac{x^2}{x^2+1}}$ e tracciarne un grafico approssimativo.

Risoluzione

- $D(f) = \mathbb{R}$
- $f(x) = f(-x)$ cioè f è pari (funz. esp. è iniettiva)
- $f(x) = 0 \iff e^{\frac{x^2}{x^2+1}} = \sqrt{e} = e^{\frac{1}{2}} \iff \frac{x^2}{x^2+1} = \frac{1}{2} \iff$
  $2x^2 = x^2 + 1 \iff x^2 = 1 \iff x = \pm 1$
- $f'(x) = -e^{\frac{x^2}{x^2+1}} \cdot \frac{(x^2+1)\cdot 2x - 2x \cdot x^2}{(x^2+1)^2} = +\underbrace{e^{\frac{x^2}{x^2+1}}}_{>0\ \forall x \in \mathbb{R}} \cdot \frac{(-2x)}{(x^2+1)^2}$

$\Rightarrow x = 0$ è l'unico pto. critico di f e $f'(x)$

cambia in $x=0$ segno da "$+$" a "$-$". $\Rightarrow x = 0$ è

un pto. di max. locale.

- Asintoti: $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) \overset{*}{=} \sqrt{e} - e^{\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{x^2+1}} = \sqrt{e} - e < 0$ (funz. esponenziale è continua)

$\Rightarrow y = \sqrt{e} - e$ è un asintoto orizzontale per $x \to \pm\infty$

- $f(0) = \sqrt{e} - 1 > 0$