Analisi Matematica 1. Durata della prova: 2 ore **17.2.22**

Firma: ....

Cognome .... **Nome** ....

Matricola .... **Corso di Laurea:** Ingegneria dell'Informazione

D1	
D2	
E1	
E2	
E3	
E4	
E5	
Σ	

Domanda 1

[4 punti]

(i) Dare la definizione di derivata parziale $f_x(x, y)$ per una funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

(ii) Enunciare il teorema del gradiente.

Risposta

(i) Se il limite

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h} =: f_x(x, y)$$

converge, allora f si dice derivabile rispetto x in (x, y) con derivata parziale $f_x(x, y)$.

(ii) Se $f : X \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ è differenziabile, allora $\forall$ versore $v = (v_1, v_2)$ la derivata direzionale $\partial_v f(x, y)$ esiste in ogni $(x, y) \in X$ e

$$\partial_v f(x, y) = v_1 \cdot f_x(x, y) + v_2 \cdot f_y(x, y)$$

Domanda 2

[4 punti]

(i) Enunciare la Formula di Taylor con il resto di Peano.

(ii) Calcolare il polinomio di Maclaurin di ordine 3 di $f(x) := x \cdot e^x$

Risposta

(i) Se $f \in C^n[a, b]$ e $x_0 \in (a, b)$, allora

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x - x_0)^k + o((x - x_0)^n) \quad \text{per } x \to 0.$$

(ii) $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ per $x \to 0$ $\Rightarrow$

$$x \cdot e^x = x + x^2 + \frac{x^3}{2} + x \cdot o(x^2) = x + x^2 + \frac{x}{2} + o(x^3)$$

per $x \to 0$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{T_3(x) = x + x^2 + \frac{x^3}{2}}}$$

Esercizio 1 **[5 punti]**

Determinare l'estremo inferiore, l'estremo superiore e, se esistono, il minimo e massimo dell'insieme

$$A = \left\{ \sqrt{n^2+2} - n : n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots \right\}$$

Risoluzione

- $a_n := \sqrt{n^2+2} - n = \dfrac{(\sqrt{n^2+2} - n)\cdot(\sqrt{n^2+2}+n)}{\sqrt{n^2+2}+n}$

$$= \frac{\cancel{n^2}+2-\cancel{n^2}}{\sqrt{n^2+2}+n} = \frac{2}{\sqrt{n^2+2}+n} \to 0 \text{ per } n \to +\infty$$

crescente in n

$\Rightarrow (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è decrescente $\Rightarrow$

- $a_0 = \sqrt{2} = \max A = \sup A$
- $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0 = \inf A$
- $0 \notin A \Rightarrow \min A$ non esiste

Esercizio 2 **[5 punti]**

Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 + \sin(x) - x\cdot e^x}{x\cdot(1-\cos(x))} =: \ell$$

Risoluzione

- Denominatore: $1-\cos(x) \sim \frac{x^2}{2}$ per $x \to 0 \Rightarrow$
  $x\cdot(1-\cos(x)) \sim \frac{x^3}{2}$ per $x\to 0$.

- Numeratore da sviluppare fino al 3° ordine:
  Usando la Domanda 2 (ii) segue

$$x^2 + \sin(x) - x\, e^x = \cancel{x^2} + \cancel{x} - \frac{x^3}{6} - \cancel{x} - \cancel{x^2} - \frac{x^3}{2} + o(x^3)$$

$$= \left(-\frac{1}{6} - \frac{1}{2}\right) x^3 + o(x^3) = \frac{-1-3}{6}\cdot x^3 + o(x^3)$$

$$= -\frac{2}{3}\cdot x^3 + o(x^3) \sim -\frac{2}{3}\cdot x^3 \text{ per } x \to 0$$

$\Rightarrow$ (per il principio di sostituzione)

$$\ell = \lim_{x\to 0} \frac{-2x^3/3}{x^3/2} = \frac{-2/3}{1/2} = -\frac{4}{3}$$

Esercizio 3

[4 punti]

Determinare gli estremi locali della funzione $f(x) := \dfrac{\ln(x^2)}{x}$ e classificarli.

Risoluzione

- f è derivabile sul suo dominio $X = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
- Gli unici candidati per i punti di estremo locale sono i punti critici
- $f'(x) = \dfrac{x \cdot \frac{1}{x^2} \cdot 2x - 1 \cdot \ln(x^2)}{x^2} = \dfrac{2 - \ln(x^2)}{x^2} = 0$

$\Leftrightarrow \ln(x^2) = 2 \Leftrightarrow x^2 = e^2 \Leftrightarrow x = \pm e.$

- $f'(x)$ cambia segno in $x = e$ da "+" a "−"
$\Rightarrow x = e$ è un pto. di massimo locale
- $f'(x)$ cambia segno in $x = -e$ da "−" a "+"
$\Rightarrow x = e$ è un pto di minimo locale.

<u>OSS:</u> f è dispari, quindi $x = e$ pto. di max $\Rightarrow$ $x = -e$ pto. di min

Esercizio 4

[4 punti]

Calcolare il piano tangente al grafico della funzione $f(x, y) = \sqrt{\dfrac{x}{y}}$ nel punto $(x_0, y_0) = (4, 1)$.

Risoluzione

- $p(x,y) = f(4,1) + f_x(4,1) \cdot (x-4) + f_y(4,1) \cdot (x-1)$
- $f(4,1) = \sqrt{\frac{4}{1}} = 2$
- $f(x,y) = x^{1/2} \cdot y^{-1/2} \Rightarrow$

$f_x(x,y) = \frac{1}{2} \cdot x^{-1/2} \cdot y^{-1/2} \Rightarrow f_x(4,1) = \frac{1}{2} \cdot \underbrace{4^{-1/2}}_{=\frac{1}{2}} \cdot \underbrace{1^{-1/2}}_{=1} = \frac{1}{4}$

$f_y(x,y) = -\frac{1}{2} x^{1/2} \cdot y^{-3/2} \Rightarrow f_y(4,1) = -\frac{1}{2} \cdot \underbrace{4^{1/2}}_{=2} \cdot \underbrace{1^{-3/2}}_{=1} = -1$

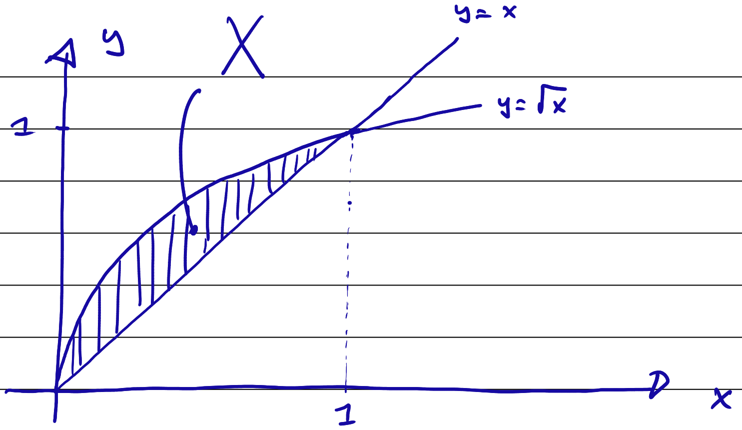
$\Rightarrow$ $\underline{\underline{p(x,y) = 2 + \frac{1}{4} \cdot (x-4) - 1 \cdot (x-1)}}$

Esercizio 5 **[6 punti]**

Disegnare l'insieme $X := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0,1],\ x \le y \le \sqrt{x}\right\}$ e calcolare l'integrale doppio

$$\iint_X 6\,xy\,dx\,dy \;=:\; I$$

Risoluzione



• $f(x,y) = 6x\cdot y$ è continua e X è y-semplice, quindi per Fubini-Tonelli segue

$$\underline{\underline{I}} = \int_{x=0}^{1}\int_{y=x}^{\sqrt{x}} 6xy\,dy\,dx = \int_{x=0}^{1}\left[\cancel{6}^{\,3}\cdot x\cdot\frac{y^2}{\cancel{2}_{\,1}}\right]_{y=x}^{x^{1/2}}dx$$

$$= 3\cdot\int_0^1 x\cdot\left(\overbrace{(x^{1/2})^2}^{=x} - x^2\right)dx$$

$$= 3\cdot\int_0^1 x^2 - x^3\,dx = 3\cdot\left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}\right]_0^1$$

$$= 3\cdot\left(\frac{1\cdot4}{3\cdot4}-\frac{1\cdot3}{4\cdot3}-0\right) = 3\cdot\frac{4-3}{12} = \frac{3}{12} = \underline{\underline{\frac{1}{4}}}$$